TESIS DE MAESTRÍA.

Álgebras inducidas por acciones parciales

Damián Ferraro[1]
Orientador: Fernando Abadie

29 de marzo de 2011
Montevideo
Uruguay

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

[1]Trabajo financiado por la UDELAR a través de la CSIC. Resolución N° 16 del 15 de setiembre de 2009 del Consejo Directivo Central.

Agradecimientos

A Patricia, por el apoyo y la paciencia.

Resumen

El objetivo final de este trabajo es la generalización, a las acciones parciales, del Teorema Simétrico de Imprimitividad de Raeburn [8], y en particular el Teorema de Green [10].

A partir de acciones de un grupo de Hausdorff localmente compacto, en una C^*-álgebra A y en un espacio de Hausdorff localmente compacto X, podemos construir la acción diagonal en el fibrado trivial $A \times X \to X$. De esta manera el teorema de Raeburn se traduce en un teorema sobre acciones en fibrados de C^*-álgebras. Este resultado tiene un enunciado para acciones parciales, las cuales se definen en el capítulo 2. La manera de probarlo es considerar primero el caso de acciones globales, para luego, utilizando la construcción de acciones envolventes en [1] y [3], reducir la demostración a esa situación. Todo esto se hace en el capítulo 3.

Finalmente, en el capítulo 4, se indica cómo obtener los teoremas de Raeburn y Green, y sus respectivos enunciados para acciones parciales, a partir de los resultados del capítulo 3. Además se discuten las situaciones planteadas en [10] para acciones parciales.

Abstract

The goal of this work is the generalization, to partial actions, of Raeburn's Symmetric Imprimitivity Theorem [8], in particular Green's theorem [10].

Given actions of a locally compact Hausdorff group, on a C^*-algebra A and on a locally compact Hausdorff space X, we can construct the diagonal action of G on the trivial bundle of C^*-algebras $A \times X \to X$ $(a, x) \mapsto x$. In this way, Raeburn's theorem translates into a theorem about actions on bundles of C^*-algebras. This result has a counterpart for partial action, which are defined in chapter 2. The way of proving the last mentioned result is by first considering the case of global actions and after that, using enveloping actions [1] [3], to reduce the proof to that situation. All this is done in chapter 3.

Finally, in chapter 4, we indicate how to obtain Raeburn and Green's Theorem, and the corresponding one for parcial actions, as corollaries of the results of chapter 3. Besides, all the situation of [10] are discussed for partial actions.

Índice general

Introducción

Las acciones parciales surgen naturalmente de considerar el flujo de una ecuación diferencial autónoma. El adjetivo "parcial" se debe a que las soluciones (maximales) no están, necesariamente, definidas en todo $\mathbb{R}$. Para hacer esto más preciso tomemos un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y un campo de clase C^1, $F : U \to \mathbb{R}^n$. A cada punto $x \in U$ le corresponde el intervalo I_x, el dominio de la solución maximal que en $t = 0$ pasa por x. Llamamos ϕ al flujo, cuyo dominio es $\Gamma := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \ : t \in I_x\}$ y $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$. Recurriendo a teoremas clásicos se puede ver que Γ es abierto en $\mathbb{R} \times U$ ([11] II Teorema 1) y que $\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x)$.

Así como I_x consta de todos los tiempos en los cuales se puede evaluar la solución por x, dado $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $U_{-t} := \{x \in U : t \in I_x\}$ es abierto y ϕ_t es un difeomorfismo de U_{-t} en U_t. De las consideraciones anteriores extraemos las siguientes propiedades:

- $\Gamma = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U \ : x \in U_{-t}\}$ es abierto en $\mathbb{R} \times U$.
- $\phi_t : U_{-t} \to U_t$ es un difeomorfismo y además $U_0 = U$, $\phi_0 = id_U$.
- $\phi_t(U_{-t} \cap U_s) = U_t \cap U_{t+s}$ para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$.
- $\phi_t \circ \phi_s|_{U_{-s} \cap U_{-s-t}} = \phi_{t+s}|_{U_{-s} \cap U_{-s-t}}$ para cualesquiera $s, t \in \mathbb{R}$.
- La función $\phi : \Gamma \to U$, $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ es continua.

Si nos olvidamos de la topología, pensamos $\mathbb{R}$ como un grupo y U como un conjunto, podemos resumir lo anterior a través de la definición siguiente.

Definición 0.0.1. El par $\alpha = (\{\alpha_t\}_{t \in G}, \{X_t\}_{t \in G})$ es una *acción parcial* del grupo[2] G en el conjunto X si se cumplen las siguientes propiedades:

1. X_t es un subconjunto de X para todo $t \in G$.
2. $\alpha_t : X_{t^{-1}} \to X_t$ es una biyección y además $X_e = X$, $\alpha_e = id_X$.
3. $\alpha_t(X_{t^{-1}} \cap X_s) = X_t \cap X_{ts}$ para todos $t, s \in G$.

[2] Usamos la notación multiplicativa.

4. $\alpha_t \circ \alpha_s : X_{s^{-1}} \cap X_{s^{-1}t^{-1}} \to X_{ts} \cap X_t$ es la restricción de α_{ts} a $X_{s^{-1}} \cap X_{s^{-1}t^{-1}}$, para todo $t, s \in G$.

El *dominio* de α es el conjunto $\Gamma_\alpha := \{(t, x) \in G \times X \mid x \in X_{t^{-1}}\}$. También llamamos α a la función $\Gamma_\alpha \to X$ tal que $(t, x) \mapsto \alpha_t(x)$. Decimos que la acción es global si $X_t = X$ para todo $t \in G$; en ese caso la definición es la usual de acción.

Habiendo resumido las propiedades que no involucran la topología, es momento de definir las acciones parciales continuas en espacios topológicos.

Definición 0.0.2. Una *acción parcial continua*, del grupo topológico G en el espacio topológico X, es una acción parcial $\alpha = (\{\alpha_t\}_{t\in G}, \{X_t\}_{t\in G})$ de G en X que además satisface las siguientes propiedades:

- X_t es un abierto de X para todo $t \in G$.
- Γ_α es abierto en $G \times X$ (con la topología producto).
- La función $\alpha : \Gamma_\alpha \to X$ es continua.

Si la acción es global obtenemos la definición usual de acción continua.

Claramente, la definición anterior hace del flujo de una ecuación diferencial una acción parcial continua de $\mathbb{R}$. Aunque no se pide explícitamente que α_t sea un homeomorfismo, esto es fácil de deducir a partir de la definición. Por otra parte, siempre que tengamos una acción parcial de un grupo en un conjunto podemos considerar en ambos la topología discreta y obtener una acción parcial continua.

La traducción de las acciones parciales en espacios topológicos a las acciones parciales en C^*-álgebras se hace, como siempre, asociando abiertos con ideales y homeomorfismos con isomorfismos (de C^*-álgebras). En primera instancia suponemos que G es discreto, y por supuesto X será de Hausdorff localmente compacto (HLC). El álgebra será $A = C_0(X)$, las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ que se anulan en infinito. A cada $t \in G$ le corresponde el ideal $A_t := C_0(X_t)$. El homeomorfismo $\alpha_t : X_{t^{-1}} \to X_t$ es equivalente a $\widetilde{\alpha}_t : A_{t^{-1}} \to A_t$, $f \mapsto f \circ \alpha_{t^{-1}}$. Tenemos una acción parcial $\widetilde{\alpha} = (\{A_t\}_{t\in G}, \{\widetilde{\alpha}_t\}_{t\in G})$ en una C^*-álgebra.

Si el grupo no es discreto, pero es HLC, las condiciones topológicas no son tan fáciles de traducir. Podemos decir que la segunda condición de 0.0.2 se corresponde con que la familia $\{A_t\}_{t\in G}$ sea una familia continua en el siguiente sentido.

Definición 0.0.3. Una familia $\{E_y\}_{y\in Y}$ de subespacios de Banach de un espacio de Banach E, indexada en un espacio topológico Y, es una *familia continua* si para cada abierto $U \subset E$ el conjunto $\{y \in Y : \ E_y \cap U \neq \emptyset\}$ es abierto en Y.

Finalmente, la última condición de la definición de acción parcial continua se traduce en la continuidad de la función $\widetilde{\alpha} : \Gamma_{\widetilde{\alpha}} \to A \mid (a,t) \mapsto \widetilde{\alpha}_t(a)$.

Repasando las condiciones obtenidas para $\widetilde{\alpha}$ observamos que la conmutatividad no aparece, y por lo tanto hemos logrado traducir las acciones parciales al caso no conmutativo[3].

Definición 0.0.4. Una acción parcial, del grupo topológico HLC G en la C^*-álgebra A, es una acción parcial $\alpha = (\{A_t\}_{t\in G}, \{\alpha_t\}_{t\in G})$, en el sentido de 0.0.1, donde además se cumple que:

- A_t es un ideal de A para todo $t \in G$. Por ideal nos referimos a que son bilaterales, cerrados y en consecuencia cerrados por la involución.
- $\{A_t\}_{t\in G}$ es una familia continua.
- α_t es un isomorfismo de C^*-álgebras para todo $t \in G$.
- La función $\alpha : \Gamma_\alpha \to A$ es continua.

Diremos que (A, G, α) es un C^*-sistema dinámico parcial. A cada uno de estos sistemas podemos asociarle una C^*-álgebra que contiene información acerca de la dinámica. Si el grupo es discreto consideramos el espacio vectorial $D := \bigoplus_{t\in G} A_t$. Si $a \in A_t$, para denotar a como elemento de D escribimos $a\delta_t$. La norma en D será $\| \ \|_1$, viendo D como las funciones de G en D que son nulas a no ser en una cantidad finita de puntos. Equipamos D con un producto y una involución:

$$(a\delta_t)(b\delta_s) := \alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a)b)\delta_{ts} \qquad (a\delta_t)^* = \alpha_{t^{-1}}(a^*)\delta_{t^{-1}}.$$

De esta forma se obtiene una $*$-álgebra normada, su completación es una $*$-álgebra de Banach, la C^*-álgebra envolvente de esta última será el producto cruzado $A \rtimes_\alpha G$. Aunque esta manera de definir el producto cruzado es corta, no ofrece una visión clara de cómo la información de la dinámica se traduce en el producto cruzado.

Conocer $A \rtimes_\alpha G$ es conocer sus representaciones, que es lo mismo que conocer las representaciones de D. Por ejemplo, si tenemos una representación fiel $T : D \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ podemos recuperar la dinámica. Dado $a \in A_{t^{-1}}$ notamos que $\alpha_t(a)\delta_t = (a^*\delta_{t^{-1}})^*$. Luego

$$\alpha_t(a)\delta_t = T^{-1}T((a^*\delta_{t^{-1}})^*) = T^{-1}\left(T(a^*\delta_{t^{-1}})^*\right),$$

lo que expresa $\alpha_t(a)$ en términos de la involución de A, la de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y la representación T. Como vemos, la información de la acción parcial se codifica en el producto cruzado.

Muchas veces es difícil conocer la clase de isomorfismos de un cierto producto cruzado. En consecuencia se intenta determinar su clase en una relación un poco más débil: la equivalencia de Morita-Rieffel. Esta información determina, entre otras cosas, la estructura de ideales del producto cruzado, los cuales a su vez están relacionados con los ideales invariantes del álgebra (o en el caso conmutativo, los abiertos invariantes).

[3]Para una exposición más detallada ver [2].

Si $A = C_0(X)$ y la acción cumple ciertas condiciones (que se expondrán en el trabajo), el Teorema de Imprimitividad de Green establece que $A \rtimes_\alpha G$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(X/G)$, siendo X/G el espacio de órbitas. En realidad el teorema es bastante más general pero ya en el enunciado anterior se aprecia su importancia. Por ejemplo, si en la situación anterior el sistema tiene una sola órbita, entonces el producto cruzado es equivalente a $\mathbb{C}$ y por lo tanto es simple. Por otra parte, el teorema también sirve para la interpretación de los productos cruzados, pues sugiere que estos deben ser pensados como espacios de órbitas (especialmente cuando el espacio de órbitas es caótico).

A su vez, el mencionado teorema de Green admite una generalización: el Teorema Simétrico de Imprimitividad de Raeburn. En un comienzo la idea del presente trabajo era exponer el teorema de Raeburn y estudiar en qué medida se podía extender a acciones parciales. Este proceso se llevó a cabo en dos pasos, en la primera etapa se generalizó el teorema de Raeburn a acciones globales en fibrados de C^*-álgebras. En la segunda se generalizó este último para acciones parciales. Podemos decir entonces que hemos logrado probar un teorema de imprimitividad para acciones parciales. Para lo cual, además de las hipótesis presentes para las acciones globales, hemos tenido que pedir algunas adicionales. Todas ellas se satisfacen automáticamente para las acciones globales. Una de estas hipótesis adicionales es la continuidad en ∞ (Definición 2.1.16). Para entender estos resultados comenzamos analizando una situación simplificada que contiene las ideas básicas.

Pensemos en grupos y espacios topológicos discretos y finitos. Un fibrado de C^*-álgebras sobre el espacio X es una colección de C^*-álgebras $\mathcal{B} = \{B_x\}_{x\in X}$. A cada B_x se le llama la fibra sobre x. Una acción α del grupo H en $\mathcal{B}$ consta de una acción (también llamada α) en la unión disjunta de las fibras que lleva fibras en fibras como isomorfismo de C^*-álgebras. Esto da lugar a, o puede verse acompañado de, una acción en el espacio de base X, la cual viene dada por $t \cdot x = y$ sii $\alpha_t(B_x) = B_y$. Si $b \in B_x$ y $t \in G$ denotamos $b = b\delta_x$ y $\alpha_t(b\delta_x) = \alpha_t(b)\delta_{t\cdot x}$.

Una sección del fibrado es una función $f : X \to \cup_{x\in X} B_x$ tal que $f(x) \in B_x$ para todo $x \in X$; definimos su norma como $\|f\| := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ (es finita porque X es finito). En las secciones definimos la acción α de manera que $\alpha_t(f)(x) = \alpha_t(f(t^{-1} \cdot x))$. El álgebra inducida por α y $\mathcal{B}$, denotada $Ind^H(\mathcal{B}, \alpha)$, es la C^*-álgebra de los puntos fijos (con las operaciones punto a punto).

Supongamos ahora que tenemos dos acciones, α y β, de grupos (finitos en este caso) H y K, respectivamente, en el fibrado $\mathcal{B}$. Entre otras condiciones, válidas en la situación actual, se pide que las acciones conmuten y sean libres. Por lo primero nos referimos a que, dados $t \in H,\ s \in K$ y $b \in \mathcal{B}_x$ cualesquiera, se cumple que $\alpha_t(\beta_s(b)) = \beta_s(\alpha_t(b))$. Con lo segundo, a que si α_t (o β_s) cumple que $\alpha_t(B_x) = B_x$ para alguna fibra B_x, entonces $t = e$ (la identidad del grupo). En esta situación observamos que los puntos fijos de α son invariantes por β y, por lo tanto, es posible definir una acción de K en $Ind^H(\mathcal{B}, \alpha)$.

Intercambiando los roles de H y K tenemos dos sistemas dinámicos $(Ind^H(\mathcal{B}, \alpha), K, \beta)$ y $(Ind^K(\mathcal{B}, \beta), H, \alpha)$. El teorema de Raeburn implica que $Ind^H(\mathcal{B}, \alpha) \rtimes_\beta K$ es Morita-Rieffel equivalente a $Ind^K(\mathcal{B}, \beta) \rtimes_\alpha H$. Veamos este hecho como si se tratase del caso general.

Para definir el bimódulo de equivalencia se necesita trabajar con una $*$-subálgebra densa de $Ind^K(\mathcal{B},\beta)\rtimes_\alpha H$. Esta álgebra consta de las funciones $F : H\times X\to\mathcal{B}$ tales que $F(t,x)\in B_x$ y además $\alpha_r(F(t,x)) = F(t,r\cdot x)$, para t,r,x arbitrarios. Dicha álgebra se denotará E_H, e invirtiendo los roles de H y K tenemos E_K. Naturalmente, E_H está generada por las funciones del tipo $f\delta_t$, con $f\in Ind^K(\mathcal{B},\beta)$, definiendo $f\delta_t(r,y) = f(y)$ si $t=r$ y 0_y en otro caso.

Como bimódulo que implementa la equivalencia se utiliza $Z = C(\mathcal{B})$, el conjunto de las secciones de $\mathcal{B}$. Como las secciones del tipo $b\delta_x$ generan Z, basta con especificar las operaciones de pre-módulo de Hilbert en estas secciones, lo que hacemos a continuación. Tomemos $f\in Ind^K(\mathcal{B},\beta),\ t\in H,\ g\in Ind^H(\mathcal{B},\alpha),\ s\in K,\ c\in B_y,\ d\in B_z$

$$(f\delta_t)\cdot(c\delta_y) = f\alpha_t(c)\delta_{t\cdot y}\qquad (c\delta_y):(g\delta_s) = \beta_{s^{-1}}(c\delta_y g)$$

$${}_{E_H}\langle c\delta_y, d\delta_z\rangle = \sum_{t\in H}\left(\sum_{r\in K}\beta_r(c\alpha_t(d^*)\delta_y\delta_y(t\cdot z))\right)\delta_t$$

$$\langle c\delta_y, d\delta_z\rangle_{E_K} = \sum_{r\in K}\left(\sum_{t\in H}\alpha_t(c^*\beta_r(d)\delta_y\delta_y(s:z))\right)\delta_r$$

Lo que aparece en la tercera ecuación multiplicado por δ_t es un promedio multiplicado por la cantidad de elementos de K, y por lo tanto es un punto fijo de β; lo mismo vale para la cuarta ecuación. La dificultad de la prueba de este resultado está en definir las mismas operaciones para grupos HLC y fibrados sobre espacios HLC. Una vez alcanzado ese objetivo tampoco es fácil verificar las propiedades que se necesitan para hacer de Z un pre-módulo de equivalencia.

Habiendo introducido los conceptos básicos con los que hemos de trabajar, pasamos a describir el contenido de este trabajo.

En el primer capítulo nos ocuparemos de definir el producto cruzado por acciones parciales de grupos HLC. Asimismo se establecerán los resultados básicos que permiten trabajar con los mencionados objetos. Todos los resultados importantes de esta primera parte serán utilizados en los capítulos posteriores. Cabe señalar que la exposición no será completamente autocontenida ya que se necesitan varias teorías o resultados auxiliares. Entre ellos se encuentran resultados básicos sobre fibrados de Banach e integración en espacios localmente convexos completos. Las pruebas de los resultados sin demostración se encuentran en [1] y en [6].

El segundo capítulo puede subdividirse en dos partes bien diferentes, pero relacionadas. En la primera se consideran propiedades básicas (y no tanto) de las acciones parciales en espacios topológicos. Además se introducen las acciones parciales en fibrados de C^*-álgebras. Mientras tanto, en la segunda parte se construyen las álgebras $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ y las acciones definidas por acciones que conmutan, generalizando lo expuesto anteriormente.

Con el contenido de los primeros capítulos se puede enunciar el resultado principal de esta tesis, lo que se hace al inicio del tercer capítulo. En el resto nos ocuparemos de demostrar ese resultado, a través de un proceso que se hará en dos etapas. En la primera se prueba el resultado para acciones globales, en la segunda se reduce la demostración del caso general a la situación anterior.

Finalmente, en el último capítulo, nos ocuparemos en deducir los teoremas de imprimitividad de Green y Raeburn a partir de los resultados del capítulo anterior. Con estos resultados probaremos el teorema de Stone-Von Neumann y lo que sería su enunciado para acciones parciales. Finalmente se discute (para las acciones parciales) caso a caso cada una de las situaciones encontradas en [10].

También se incluyen dos apéndices. El primero contiene los resultados sobre integración en espacios localmente convexos que utilizaremos, principalmente, en el capítulo 3. En el segundo apéndice describimos la completación de Hausdorff de un espacio normado y la C^*-completación de una $*-$álgebra de Banach.

Capítulo 1

Acciones Parciales y Productos Cruzados

En este capítulo se define el producto cruzado por una acción parcial, generalizando la definición de las acciones globales. Por otra parte se caracterizan las representaciones de los productos cruzados como representaciones de cierto fibrado. Finalmente se prueba un resultado concerniente a los productos cruzados de acciones envolventes. Todos los resultados y las definiciones se encuentran, o están inspirados en, [1], [3], [5] y [6].

Los únicos resultados que no aparecen en los textos mencionados son los Teoremas 1.2.14, 1.2.15 y 1.4.8. Las demostraciones de los primeros dos se basan en la Sección 12, Capítulo VIII, de [6]. El restante es una re-formulación del Teorema 1.1. de [3], la modificación se hizo para poder probar la positividad de ciertos produtos internos (ver la Proposición 1.4.12 y las demostraciones siguientes).

1.1. Productos cruzados

Comenzamos recordando las definiciones de acciones parciales en espacios topológicos y en C^*-álgebras, 0.0.2 y 0.0.4 respectivamente. Cada vez que tengamos una acción parcial continua, α, del grupo topológico Hausdorff localmente compacto (HLC) G en el espacio topológico HLC X, diremos que la terna (X, G, α) es un sistema dinámico parcial. Asimismo, si en lugar de X tenemos una C^*-álgebra A, diremos que (A, G, α) es un C^*-sistema dinámico parcial (Definición 0.0.4).

Notación 1.1.1. Además de la notación de la definición 0.0.1, usaremos indistintamente, Γ, Γ_X, Γ_G ó $\Gamma(X, G)$ para indicar el dominio de la acción parcial (las primeras si alguno de los espacios o la acción parcial está claro por contexto).

La tarea que tenemos es asociarle a cada terna (A, G, α) una C^*-álgebra. Si la acción es global, lo que se hace es definir en las funciones continuas de soporte compacto de G en A, $C_c(G, A)$, un producto y una involución (en general estas operaciones no dan lugar al álgebra que se busca, pero se usan en su construcción). Si el grupo es discreto la involución es $f^*(t) = \alpha_t(f(t^{-1})^*)$. Parece natural reemplazar $C_c(G, A)$ por

$$C_c^\alpha(G, A) := \{f \in C_c(G, A) : \ f(t) \in A_t, \ \forall t \in G\}.$$

No es trivial el probar que $C_c^\alpha(G, A)$ contiene funciones no nulas. Sin embargo, es posible demostrar que esto es así si cambiamos un poco la perspectiva. Recordemos que un fibrado $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \pi, X)$ consta de dos espacios topológicos de Hausdorff $\mathcal{B}$ y X y de un mapa sobreyectivo, abierto y continuo $\pi : \mathcal{B} \to X$. A X se le llama espacio de base, y dado $x \in X$, llamamos a $\mathcal{B}_x := \pi^{-1}(\{x\})$ la fibra sobre x. Una sección continua es una función continua $f : X \to \mathcal{B}$, tal que $\pi \circ f = id_X$. Diremos que el fibrado tiene suficientes secciones continuas si para cada $b \in \mathcal{B}$ existe una sección continua $f : X \to \mathcal{B}$, tal que $f(\pi(b)) = b$ (en este caso decimos que f pasa por b).

A partir de un C^*-sistema dinámico parcial (A, G, α) construimos un fibrado $\mathfrak{B}_\alpha = (\mathcal{B}, \pi, G)$, donde

$$\mathcal{B} := \{(a, t) \in A \times G : \ a \in A_t\}, \ \text{y } \pi : \mathcal{B} \to G \mid (a, t) \mapsto t,$$

por supuesto que $\mathcal{B}$ tiene la topología relativa a $A \times G$.

Claramente, π es sobreyectiva y continua; veamos que es abierta: sean $U \subset A$ y $V \subset G$ abiertos no vacíos. Si $t \in \pi(\mathcal{B} \cap (U \times V))$, existe $a \in A_t \cap U$. Como $\{A_t\}_{t \in G}$ es una familia continua, $\{s \in G : A_s \cap U \neq \emptyset\} \cap V$ es un entorno de t contenido en $\pi(\mathcal{B} \cap (U \times V))$. Hemos probado que $\mathfrak{B}_\alpha$ es un fibrado.

Observar que si $f : G \to \mathcal{B}$ es una sección continua, entonces $f(t) = (a(t), t), \ a(t) \in A_t \ \forall \ t \in G$, donde además $a : G \to A$ es continua. Esto nos da una correspondencia biyectiva entre las secciones continuas de $\mathfrak{B}_\alpha$ y $C^\alpha(G, A) := \{f \in C(G, A) : \ f(t) \in A_t, \ \forall \ t \in G\}$. De ahora en más no haremos distinciones entre ambos conjuntos.

Decir que $\mathfrak{B}_\alpha$ tiene suficientes secciones continuas es equivalente a decir que, dado $(a, t) \in \mathcal{B}$, existe $f \in C_c^\alpha(G, A)$ tal que $f(t) = a$ (por el Lema de Urysohn). Para ver que $C_c^\alpha(G, A)$ no consta solamente de la función nula, alcanzará con probar que $\mathfrak{B}_\alpha$ tiene suficientes secciones continuas.

Definición 1.1.2. ([6] II 13.4) Un *fibrado de Banach* es un fibrado $(\mathcal{B}, \pi, X)$ junto con tres funciones:

$$\| \ \| : \mathcal{B} \to \mathbb{R} \mid a \mapsto \|a\|, \qquad + : \{(a, b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \ \pi(a) = \pi(b)\} \to \mathcal{B} \mid (a, b) \mapsto a + b$$

$$\text{y } \mathbb{C} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B} \mid (\lambda, a) \mapsto \lambda a;$$

llamadas norma, suma y producto por escalares, respectivamente, que cumplen las siguientes propiedades:

1. $\| \ \|$ y $+$ son continuas.

2. $\pi(a+b) = \pi(a)\ \forall\ (a,b) \mid \pi(a) = \pi(b)$.

3. $\pi(\lambda a) = \pi(a)\ \forall\ (\lambda, a) \in \mathbb{C} \times \mathcal{B}$.

4. La suma y el producto por escalares dan a $\mathcal{B}_x$ estructura de espacio vectorial, para cualquier $x \in X$. Además, la restricción de la (función) norma a cada fibra es una norma, de manera que cada fibra con su estructura de espacio vectorial normado es un espacio de Banach.

5. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ la función $\mathcal{B} \to \mathcal{B} \mid a \mapsto \lambda a$ es continua.

6. Si para cada $x \in X$ el símbolo 0_x denota el elemento nulo de $\mathcal{B}_x$, entonces, dada una red $\{a_i\}_{i\in I}$ en $\mathcal{B}$ tal que $\lim_i \|a_i\| = 0$ y $\lim_i \pi(a_i) = x$, se tiene que $\lim_i a_i = 0_x$.

Claramente, $\mathfrak{B}_\alpha$ es un fibrado de Banach con: $(a,t) + (b,t) = (a+b,t)$, $\lambda(a,t) = (\lambda a, t)$ y $\|(a,t)\| = \|a\|$. Nuestra discusión sobre si $\mathfrak{B}_\alpha$ tiene suficientes secciones continuas concluye con el siguiente resultado de A. Douady y L. dal Soglio-Herault, cuya demostración puede encontrarse en el Apéndice C de [6].

Teorema 1.1.3. *Todo fibrado de Banach, con espacio de base paracompacto o localmente compacto, tiene suficientes secciones continuas.*

Definimos el soporte, $\mathrm{sop}\{f\}$, de una sección f como la clausura del conjunto $\{x \in G :\ f(x) \neq 0_x\}$. Nótese la correspondencia entre $C_c^\alpha(G,A)$ y las secciones continuas de soporte compacto del fibrado $\mathfrak{B}_\alpha$.

Definición 1.1.4. Dados un fibrado de Banach $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \pi, X)$ y una sección $f : X \to \mathcal{B}$ definimos:

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| :\ x \in X\},$$

$$C^b(\mathcal{B}) := \{f : X \to \mathcal{B} :\ f \text{ es una sección continua y } \|f\|_\infty < \infty\},$$

$$C_c(\mathfrak{B}) := \{f :\ f : X \to \mathcal{B} \text{ es una sección continua de soporte compacto.}\}$$

Una vez que hemos identificado $C_c^\alpha(G,A)$ con $C_c(\mathfrak{B}_\alpha)$, queremos olvidarnos de $C_c^\alpha(G,A)$ y definir el producto cruzado sólo en términos de $\mathfrak{B}_\alpha$, de manera que para el caso de las acciones globales obtengamos la definición usual. En $\mathfrak{B}_\alpha$ definimos dos operaciones (definición de [5]):

$$\begin{array}{rl} \mathfrak{B}_\alpha \times \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha & ((a,t),(b,s)) \mapsto (a,t)(b,s) := (\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a)b), ts) \\ {}^* : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\alpha & (a,t) \mapsto (a,t)^* := (\alpha_{t^{-1}}(a^*), t^{-1}) \end{array} \tag{1.1}$$

Las siguientes propiedades son inmediatas: $\mathcal{B}_t\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_{ts}$ y $\mathcal{B}_t^* = \mathcal{B}_{t^{-1}}$, para cualesquiera $t, s \in G$. También se cumple que $(a,t)^{**} = (a,t)$ para cualesquiera $a \in A$, $t \in G$. Si restringimos $*$ a $\mathcal{B}_e$, entonces $\mathcal{B}_e$ es una C^*-álgebra con el producto $*$ y la involución *. Obsercar que la función $A \to \mathcal{B}_e$, $a \mapsto (a,e)$ es un isomorfismo de C^*-Álgebras.

En el caso de las acciones globales, el producto e involución de $C_c(G,A) \approx C_c(\mathfrak{B}_\alpha)$ quedan determinadas (en términos de las operaciones definidas antes):

$$(f * g)(t) := \int_G f(r)g(r^{-1}t)d\mu(r) \qquad f^*(t) = \Delta(t^{-1})(f(t^{-1}))^*,$$

siendo μ una medida de Haar invariante a izquierda de G y Δ su función modular.

Las mismas fórmulas sirven para definir una estructura de $*$-álgebra normada en $C_c(\mathfrak{B}_\alpha)$. En realidad, esto puede hacerse en fibrados que cumplen ciertas propiedades que observamos en $\mathfrak{B}_\alpha$.

Definición 1.1.5. ([6] VIII 16.2) Un *fibrado de Fell*[1] $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \pi, G)$ es un fibrado de Banach cuyo espacio de base es un grupo topológico HLC, junto con dos operaciones continuas:

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B} \mid (a,b) \mapsto ab \quad \text{ y } \quad {}^* : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \mid a \mapsto a^*,$$

las cuales satisfacen, para $a, b, c \in \mathcal{B}$, $s, t \in G$ y $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ arbitrarios, las propiedades:

- $(ab)c = a(bc)$, $(\lambda a)(\gamma b) = (\lambda\gamma)ab$, $(ab)^* = b^*a^*$, $(\lambda a)^* = \overline{\lambda}a^*$ y $a^{**} = a$.
- $\mathcal{B}_t\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_{ts}$ y $\mathcal{B}_t^* = \mathcal{B}_{t^{-1}}$.
- $\|a^*a\| = \|a\|^2$ y $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$.
- $a^*a \geqslant 0$ en $\mathcal{B}_e$, considerando en $\mathcal{B}_e$ la estructura de C^*-álgebra inducida por las propiedades anteriores.

Lema 1.1.6. *(Versión más simple del Teorema 3.10 de [5].) Dado un C^*-sistema dinámico parcial (A, G, α), su fibrado de Banach asociado, $\mathfrak{B}_\alpha$, es un fibrado de Fell con las operaciones 1.1.*

Demostración. Verificamos solamente las propiedades que no se deducen inmediatamente de la definición de acción parcial continua, por ejemplo la asociatividad del producto. Tomemos $r, s, t \in G$ y $a \in A_r,\ b \in A_s,\ c \in A_t$, tenemos que:

$$((a,r)(b,s))\,(c,t) = \left(\alpha_{rs}\left[\alpha_{(rs)^{-1}}\left(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)\right)c\right], rst\right)$$

$$(a,r)\,((b,s)(c,t)) = \left(\alpha_r\left[\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b)c)\right], rst\right),$$

basta con probar la igualdad $\alpha_{rs}\left[\alpha_{(rs)^{-1}}\left(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)\right)c\right] = \alpha_r\left[\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b)c)\right].$

En el miembro izquierdo $\alpha_{(rs)^{-1}}\left(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)\right) = \alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)$ ya que $\alpha_{r^{-1}}(a)b \in A_{r^{-1}} \cap A_{r^{-1}rs}$. A continuación tomamos una unidad aproximada de A_s, $\{e_i\}_{i\in I}$ y calculamos:

[1] Esta definición es de [6], allí los fibrados de Fell son llamados C^*-fibrados algebraicos, traducción del inglés de C^*-algebraic bundle.

$$\begin{aligned}
\alpha_{rs}\left[\alpha_{(rs)^{-1}}\left(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)\right)c\right] &= \alpha_{rs}\left[\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)c\right] = \lim_i \alpha_{rs}\left[\alpha_{s^{-1}}(\alpha_{r^{-1}}(a)b)\alpha_{s^{-1}}(e_i)c\right] \\
&= \lim_i \alpha_{rs}[\alpha_{s^{-1}}(\underbrace{\alpha_{r^{-1}}(a)b\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(e_i)c)}_{\in A_s\cap A_{s(rs)^{-1}}})] \\
&= \lim_i \alpha_r\left[\alpha_{r^{-1}}(a)b\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(e_i)c)\right] = \lim_i \alpha_r\left[\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(be_i)c)\right] \\
&= \alpha_r\left[\alpha_{r^{-1}}(a)\alpha_s(\alpha_{s^{-1}}(b)c)\right].
\end{aligned}$$

Con respecto a la bilinealidad:

$$\begin{aligned}
(\lambda(a,r))(\gamma(b,s)) &= (\lambda a,r)(\gamma b,s) = (\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(\lambda a)\gamma b),rs) = (\lambda\gamma\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b),rs) \\
&= \lambda\gamma(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b),rs) = \lambda\gamma((a,r)(b,s)).
\end{aligned}$$

Ahora veamos que $(a,r)^{**}=(a,r)$ y $((a,r)(b,s))^*=(b,s)^*(a,r)^*$:

$$\begin{aligned}
(a,r)^{**} &= (\alpha_{r^{-1}}(a^*),r^{-1})^* = (\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a^*)^*),r) = (a,r). \\
((a,r)(b,s))^* &= (\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b),rs)^* = (\alpha_{(rs)^{-1}}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)^*),s^{-1}r^{-1}) \\
&= (\alpha_{s^{-1}}(\alpha_s(\alpha_{s-1}(b^*))\alpha_{r^{-1}}(a^*)),s^{-1}r^{-1}) = (\alpha_{s^{-1}}(b^*),s^{-1})(\alpha_{r^{-1}}(a^*),r^{-1}) \\
&= (b,s)^*(a,r)^*
\end{aligned}$$

Probemos las propiedades que relacionan la norma con el producto:

$$\|(a,r)(b,s)\| = \|(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b),rs)\| = \|\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a)b)\| = \|\alpha_{r^{-1}}(a)b\| \leqslant \|a\|\|b\| = \|(a,r)\|\|(b,s)\|$$

$$\|(a,r)^*(a,r)\| = \|(\alpha_{r-1}(\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a^*))a),e)\| = \|\alpha_r(\alpha_{r^{-1}}(a^*))a\| = \|a^*a\| = \|a\|^2 = \|(a,r)\|^2.$$

Por último $(a,t)^*(a,t) = (\alpha_{t^{-1}}(a^*),t^{-1})(a,t) = (\alpha_t^{-1}(a^*a),e) \geqslant 0.$ □

Tal cual lo hicimos para los fibrados asociados a sistemas globales, dado un fibrado de Fell $\mathfrak{B}$, definimos una estructura de $*-$álgebra normada en $C_c(\mathfrak{B})$. Tomemos una medida de Haar invariante a izquierda en G, llamada μ, y sea Δ su función modular. Si $f,g\in C_c(\mathfrak{B})$ y $\lambda\in\mathbb{C}$:

Suma y producto por escalares

$$(f+\lambda g)(t) := f(t)+\lambda g(t) \quad \forall\ t\in G.$$

Claramente, $f+\lambda g$ es una sección continua cuyo soporte está incluido en la unión de los soportes de f y g.

Producto

$$(f*g)(t) := \int_G f(r)g(r^{-1}t)d\mu(r) \quad \forall\ t\in G.$$

Observar que, para un $t \in G$ fijo, la función $G \to \mathcal{B}_t$ dada por $t \mapsto f(r)g(r^{-1}t)$ es continua de soporte compacto, donde la integral es la integral en espacios de Banach. Aún debe probarse que $f * g$ es continua, ver [6] VIII 5, o la prueba del punto 1. del teorema 1.2.14.

Involución

$$f^*(t) := \Delta(t^{-1})f(t^{-1})^*.$$

La función $t \mapsto f^*(t)$ es una sección con soporte compacto. Para probar la continuidad recurrimos a [6] (13.10 II). En el caso que nos interesa, fibrados asociados a C^*-sistemas dinámicos parciales, esto es fácil de demostrar.

Norma

$$\|f\|_1 := \int_G \|f(t)\| d\mu(t).$$

El siguiente resultado resume algunas propiedades que se encuentran en [6] VIII 5. En realidad, la mayoría de las propiedades a verificar son inmediatas, y las que no lo son se deducen del Apéndice A.

Proposición 1.1.7. *Dado un fibrado de Fell $\mathfrak{B}$, $C_c(\mathfrak{B})$ es una $*-$álgebra normada con las operaciones definidas arriba.*

En vista del resultado anterior, tenemos lo siguiente.

Definición 1.1.8. Para el fibrado de Fell $\mathfrak{B}$ se define $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$ como la $*-$álgebra de Banach que resulta de completar $C_c(\mathfrak{B})$. Por otra parte, se define $C^*(\mathfrak{B})$ como la C^*-completación de $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$. Las completaciones a las que hacemos referencia son las que se encuentran en el Apéndice B.

Definición 1.1.9. Dado un C^*-sistema dinámico parcial (A, G, α), se define el *producto cruzado parcial* de A por G, que se denota $A \rtimes_\alpha G$, como $C^*(\mathfrak{B}_\alpha)$.

En el caso de las acciones globales, esta definición de producto cruzado coincide con la dada en [12]. Esto es debido a la identificación $C_c(G, A) \approx C_c(\mathfrak{B}_\alpha)$ y al Corolario 2.46 del texto mencionado.

Unidades aproximadas

Sería muy importante poder determinar si $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$ tiene una unidad aproximada, y más interesante sería saber si podemos encontrarla en $C_c(\mathfrak{B})$, ya que hemos definido $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$ como una completación de $C_c(\mathfrak{B})$.

Definición 1.1.10. Una *unidad aproximada* del álgebra de Banach B es una red acotada $\{e_i\}_{i \in I}$ tal que para todo $b \in B$ se cumple que $\lim_i e_i b = \lim_i b e_i = b$.

Si tenemos una unidad aproximada $\{e_i\}_{i\in I}$ de una $*-$álgebra de Banach, entonces $\{e_i^*\}_{i\in I}$ y $\{e_i^* e_i\}_{i\in I}$ son unidades aproximadas. Por lo tanto, siempre que tengamos una $*-$álgebra de Banach con unidad aproximada podemos suponer que esta última es autoadjunta y positiva, vista como elemento de la C^*-completación.

Definición 1.1.11. Una *unidad aproximada fuerte* del fibrado de Fell $\mathfrak{B}$ es una red $\{e_i\}_{i\in I}$ contenida en $\mathcal{B}_e$ tal que: (i) $\|e_i\| \leqslant 1$ para todo $i \in I$, (ii) $e_i \geqslant 0$ para todo $i \in I$ y (iii) si $K \subset \mathcal{B}$ es un compacto, entonces $\lim_i \sup\{\|a - e_i a\| : \ a \in K\} = \lim_i \sup\{\|a - a e_i\| : \ a \in K\} = 0$.

Notar que toda C^*-álgebra puede verse como un fibrado de Fell sobre el grupo trivial, y en ese caso, una unidad aproximada fuerte es simplemente una unidad aproximada[2]. Todo fibrado de Fell tiene una unidad aproximada fuerte, esto es la Proposición 16.3 Cap. VIII de [6], cuya prueba omitimos.

Proposición 1.1.12. *Si $\mathfrak{B}$ es un fibrado de Fell, entonces toda unidad aproximada de $\mathcal{B}_e$ es una unidad aproximada fuerte de $\mathfrak{B}$.*

Desde nuestro punto de vista interesa el siguiente resultado.

Lema 1.1.13. *Si $\mathfrak{B}$ es un fibrado de Fell, entonces existe una unidad aproximada de $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$ contenida en $C_c(\mathfrak{B})$.*

La prueba se encuentra en [6], y consiste básicamente en hacer lo mismo que para las acciones globales. Se toma una unidad aproximada $\{e_i\}_{i\in I}$ del fibrado contenida en $\mathcal{B}_e$. Como el fibrado tiene suficientes secciones continuas y el espacio de base es HLC, existe una red $\{g_i\}_{i\in I} \subset C_c(\mathfrak{B})$ tal que $g_i(e) = e_i$ y $\|g_i\|_\infty \leqslant 1$ para todo $i \in I$. Ahora se considera una base B de entornos compactos de $e \in G$. Para cada $V \in B$ se toma una función $\psi_V \in C_c(G)^+$ tal que $\psi_V|_{V^c} = 0$, $\psi_V(t) = \psi(t^{-1})$ y $\int_G \psi_V d\mu(t) = 1 \ \forall \ t \in G$. El resto de la prueba consiste en probar que del conjunto de las funciones $t \mapsto \psi_V(t) g_i(t)$ se puede extraer una unidad aproximada.

1.2. Representaciones

En el caso de las acciones globales, sabemos que podemos pensar $C_c(\mathfrak{B}_\alpha)$ (o $C_c(G, A)$) como una subálgebra densa de $A \rtimes G$, debido a que en ese caso tenemos formas de obtener representaciones fieles de $C_c(G, A)$ a partir de representaciones fieles de A (ver [12]). Buscamos la misma propiedad para las acciones parciales. En [6] VIII 16.4 se prueba que las *-representaciones de $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$ separan puntos, lo que permite pensar $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu) \subset C^*(\mathfrak{B})$. Esto último claramente implica que podemos pensar $C_c(\mathfrak{B}) \subset C^*(\mathfrak{B})$ (de lo que más adelante veremos una demostración directa).

Estamos buscando una representación de $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$. De acuerdo a [6] VIII 13.2, esto equivale a buscar representaciones de $\mathfrak{B}$, las que definiremos luego de discutir la topología fuerte en los

[2] En el sentido de C^*-álgebras y no como $*-$álgebra de Banach.

operadores adjuntables sobre un módulo de Hilbert. En lo que respecta a módulos de Hilbert y equivalencia de Morita-Rieffel, usaremos las definiciones y resultados de [9], también puede usarse [4].

Recordamos que los módulos de Hilbert son módulos sobre C^*-álgebras. Así es que, si decimos que $\mathcal{X}$ es un B-módulo de Hilbert, implícitamente decimos que B es una C^*-álgebra.

Definición 1.2.1. Dado un B-módulo de Hilbert a derecha $\mathcal{X}$, para cada $x \in \mathcal{X}$ definimos la seminorma $p_x : \mathfrak{L}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ de manera que $p_x(T) = \|Tx\|$. La *topología fuerte* o SOT (de strong operator topology) es la topología vectorial generada por la familia de seminormas $\{p_x\}_{x\in X}$.

Definición 1.2.2. Dado un B-módulo de Hilbert a derecha $\mathcal{X}$, para cada $x \in \mathcal{X}$ definimos la seminorma $q_x : \mathfrak{L}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ $q_x(T) = p_x(T) + p_x(T^*)$. La topología $* - SOT$ es la topología vectorial generada por la familia de seminormas $\{q_x\}_{x\in X}$.

Lema 1.2.3. *Las topologías SOT y $* - SOT$ son localmente convexas. Además la $* - SOT$ es completa.*

Demostración. Claramente son localmente convexas ya que están generadas por familias de seminormas. Veamos que la $* - SOT$ es completa. Sea $\{T_i\}_i$ una red de Cauchy en $\mathfrak{L}(\mathcal{X})$ con la topología $* - SOT$. Esto implica que para cada $x \in \mathcal{X}$ las redes $\{T_i x\}_i$ y $\{T_i^* x\}_i$ son de Cauchy. Como $\mathcal{X}$ es completo existen $Tx := \text{lím}_i T_i x$ y $Sx := \text{lím}_i T_i^* x$ para cada $x \in \mathcal{X}$. La igualdad $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \ \forall\ x, y \in \mathcal{X}$ se deduce de la continuidad del producto interno. Esto prueba que $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ y que $T^* = S$, a partir de lo cual es fácil ver que T es el $* - SOT$ límite de $\{T_i\}_{i\in I}$. □

Definición 1.2.4. Una *representación* del fibrado de Fell $\mathfrak{B}$ en el $B-$módulo de Hilbert (a derecha) $\mathcal{X}_B$ es una función $T : \mathcal{B} \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ tal que:

- La restricción de T a cada fibra es lineal.
- $T(ab) = T(a)T(b)\ \forall\ a, b \in \mathcal{B}$.
- $T(a^*) = T(b)^*\ \forall\ a \in \mathcal{B}$.
- T es continua en la topología SOT.

Toda representación T cumple que $\|T(a)\| \leqslant \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{B}$. En efecto, la restricción de T a $\mathcal{B}_e$ es una representación de $\mathcal{B}_e$ y por lo tanto es contractiva; luego, dado $a \in \mathcal{B}$:

$$\|T(a)\|^2 = \|T(a^*a)\| \leqslant \|a^*a\| = \|a\|^2.$$

La condición de que T sea continua en la topología SOT es equivalente a pedir que sea continua en la topología $* - SOT$ ya que $(T_a)^*x = T_{a^*}x$, siempre que $a \in \mathcal{B}$, $x \in \mathcal{X}$.

La forma de obtener una representación de $\mathfrak{L}_1(\mu, \mathfrak{B}_\alpha)$ a partir de una de $\mathfrak{B}$ es “integrando”, en el sentido de [6] VIII 11.

Proposición 1.2.5. *Dados un fibrado de Fell* $\mathfrak{B}$ *y una representación* $T : \mathcal{B} \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$*, existe una única representación* $\widetilde{T} : \mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ *tal que:*

$$\widetilde{T}_f x = \int_G T(f(t))x d\mu(t) \quad \forall\ x \in \mathcal{X}_B,\ f \in C_c(\mathfrak{B}).$$

Demostración. Aunque este resultado no está enunciado explícitamente en [6], es similar a varios que se encuentran allí[3], solamente daremos la idea general.

Si $f \in C_c(\mathfrak{B})$, es claro que $T \circ f$ es continua en la topología $*$-SOT y tiene soporte compacto. Por lo tanto integrable (Proposición A.1.4) por el Lema 1.2.3. Definimos $\widetilde{T}_f$ como la integral de $T \circ f$. La igualdad de la tesis, en este caso, se deduce a partir de que, para todo $x \in X$, la función $ev_x : \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B) \to \mathcal{X}_B$ $R \mapsto R(x)$ es $*$-SOT continua. Esa igualdad, a su vez, implica que $\|\widetilde{T}_f\| \leqslant \|f\|_1$, lo que permite extender $\widetilde{T}$ a $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$. A esa extensión también la llamamos $\widetilde{T}$ y es la que buscamos en la tesis; verificar que es una representación se reduce a probar que su restricción a $C_c(\mathfrak{B})$ lo es, lo que se deduce a partir de los Corolarios A.2.4 y A.2.5.

□

Definición 1.2.6. En las hipótesis de la Proposición anterior, si $\iota : \mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu) \to C^*(\mathfrak{B})$ es la inclusión canónica, la representación $I(T) : C^*(\mathfrak{B}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ será la única tal que $I(T) \circ \iota = \widetilde{T}$. A $I(T)$ la llamaremos la *forma integrada* de T.

En nuestra búsqueda de una representación fiel en $C_c(\mathfrak{B})$ construiremos un $\mathcal{B}_e$-módulo de Hilbert a derecha $\mathcal{X}$ y una representación de $\mathfrak{B}$ en $\mathcal{X}$. Comencemos definiendo una función $\langle\ ,\ \rangle : C_c(\mathfrak{B}) \times C_c(\mathfrak{B}) \to \mathcal{B}_e$ de manera que:

$$\langle f, g \rangle := \int_G f(t)^* g(t) d\mu(t).$$

Es inmediato mostrar que $\langle\ ,\ \rangle$ es lineal en la segunda variable y conjugado lineal en la primera; también es positivo definido, ya que $\phi(\langle f, f \rangle)$ es positivo para todo estado ϕ de $\mathcal{B}_e$.

Con el mismo procedimiento se ve que $\langle\ ,\ \rangle$ da lugar a una norma: si $\phi(\langle f, f \rangle) = 0$ para todo estado ϕ, eso implica que $\phi(f(t)^* f(t)) = 0$ para todo $t \in G$ y estado ϕ; luego $f = 0$.

La acción de $\mathcal{B}_e$ a derecha en $C_c(\mathfrak{B})$ es la multiplicación punto a punto, es decir que si $a \in \mathcal{B}_e$ y $f \in C_c(\mathfrak{B})$: $(fa)(t) := f(t)a$. Para terminar de ver que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno, que da a $C_c(\mathfrak{B})$ estructura de $\mathcal{B}_e$-(pre)-módulo de Hilbert a derecha, tomemos $a \in \mathcal{B}_e$ y $f, g \in C_c(\mathfrak{B})$; calculemos:

$$\langle f, ga \rangle = \int_G f(t)^*(g(t)a) d\mu(t) = \int_G (f(t)^* g(t)) a d\mu(t) = \int_G (f(t)^* g(t)) d\mu(t) a = \langle f, g \rangle a.$$

En la segunda igualdad usamos que el producto es asociativo y en la tercera que la multiplicación por a es una función lineal y acotada en $\mathcal{B}_e$.

[3]Ver especialmente la Sección 11 Cap. VIII

Llamamos $\mathcal{X}$ al $\mathcal{B}_e$-módulo de Hilbert que resulta de completar $C_c(\mathfrak{B})$ con la norma que da el producto interno con valores en $\mathcal{B}_e$ (Apéndice B). Ahora queremos definir una representación $\Lambda : \mathfrak{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{X})$. Tomemos $b \in \mathcal{B}$; para $f \in C_c(\mathfrak{B})$ definimos:

$$\Lambda(b)f(r) := bf(\pi(b)^{-1}r) \quad \forall\, r \in G.$$

Es inmediato ver que $\Lambda(b)f \in C_c(\mathfrak{B})$. Para ver que $\Lambda(b)$ es acotado respecto de la norma de $\mathcal{X}$ necesitamos lo siguiente.

Afirmación 1.2.7. *Si $\mathfrak{B}$ es un fibrado de Fell y $a \in \mathcal{B},\ b \in \mathcal{B}_e$, entonces $\|b\|^2 a^*a - a^*b^*ba$ es positivo en $\mathcal{B}_e$.*

Demostración. Utilizaremos los siguientes hechos (cuya demostración puede encontrarse en [7] 1.3.): si C es una C^*-álgebra, $c \in C$ y $t \geqslant \|c\|^2$ entonces $\|t - c^*c\| \leqslant t$; por otra parte si $c^* = c$ y existe $t \geqslant \|c\|$ tal que $\|t - c^*c\| \leqslant t$, entonces c es positivo.

Volviendo a lo que queremos probar, claramente $c = \|b\|^2 a^*a - a^*b^*ba$ es autoadjunto. Si $t = 2\|b\|^2\|a\|^2 \geqslant \|c\|$, basta con probar $\|t - c\| \leqslant t$, usando lo expuesto en el párrafo anterior:

$$\|t - c\| \leqslant \|b^2\| \| \|a\|^2 - a^*a\| + \| \|b\|^2\|a\|^2 - (ba)^*(ba)\| \leqslant t.$$

$\square$

Continuando con la discusión previa a la Afirmación:

$$\|b\|^2\langle f, f\rangle - \langle \Lambda(b)f, \Lambda(b)f\rangle = \int_G \|b\|^2 f(t)^*f(t) - f(t)^*b^*bf(t)d\mu(t) \geqslant 0.$$

En la primera igualdad hemos usado que μ es invariante a izquierda, y en la última desigualdad procedimos de la misma manera que en la prueba de la positividad del producto interno (esta vez usando la Afirmación anterior). Por lo tanto $\Lambda(b)$ se extiende a un único operador de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$, que llamamos $\Lambda(b)$.

Para probar que $\Lambda(ab) = \Lambda(a)\Lambda(b)$, basta con mostrar que $\Lambda(ab)f = \Lambda(a)\Lambda(b)f$ para cualquier $f \in C_c(\mathfrak{B})$. Eso se deduce directamente de la definición de fibrado de Fell. Que Λ es lineal en cada fibra se deduce análogamente.

Para ver que $\Lambda(b)^* = \Lambda(b^*)$, basta con probar que $\langle \Lambda(b)f, g\rangle = \langle f, \Lambda(b)g\rangle$ para cualesquiera $f, g \in C_c(\mathfrak{B})$. Usando que la medida es invariante a izquierda deducimos que

$$\langle \Lambda(b)f, g\rangle = \int_G (bf(\pi(b)^{-1}t))^*g(t)d\mu(t) = \int_G f(t)^*(b^*g(\pi(b^*)^{-1}t))d\mu(t) = \langle f, \Lambda(b^*)g\rangle.$$

Con lo que memos probado deducimos que $\|\Lambda(b)\| \leqslant \|b\|$ para todo $b \in \mathcal{B}$, ver la Definición 1.2.4. Por lo tanto, para probar que Λ es una representación, basta con mostrar que la función $\mathcal{B} \to \mathcal{X}$ tal que $b \mapsto \Lambda(b)f$ es continua, para toda $f \in C_c(\mathfrak{B})$. Probaremos esto y además que

$b \mapsto \Lambda(b)f$ es continua respecto a $\| \ \|_1$. Primero observamos que, dada $f \in C_c(\mathfrak{B})$ y un abierto U que contiene al soporte de f y tiene clausura compacta, tenemos que

$$\|f\|_{\mathcal{X}}^2 \leqslant \int_G \|f(t)\|^2 d\mu(t) \leqslant \mu(U)\|f\|_\infty^2.$$

Por lo tanto $\|f\|_{\mathcal{X}} \leqslant \mu(U)^{1/2}\|f\|_\infty$, de forma análoga probamos que $\|f\|_1 \leqslant \mu(U)\|f\|_\infty$.

Tomemos una red $\{b_i\}_i$ de $\mathcal{B}$ que converge a $b \in \mathcal{B}$. Sean V un entorno compacto de $\pi(b)$, e i_0 tal que si $i \geqslant i_0$ entonces $\pi(b_i) \in V$. Para $i \geqslant i_0$, el soporte de $\Lambda(b_i)(f)$ está contenido en $V\mathrm{sop}\{f\}$. Recurriendo a la desigualdad de arriba, si $i \geqslant i_0$, concluimos que

$$\|\Lambda(b_i)(f) - \Lambda(b)f\|_{\mathcal{X}} \leqslant \mu(V\mathrm{sop}\{f\})^{1/2}\|\Lambda(b_i)(f) - \Lambda(b)f\|_\infty.$$

Basta con probar que $\lim_i \|\Lambda(b_i)(f) - \Lambda(b)f\|_\infty = 0$. Esto se hace por absurdo.

Considerando la red a partir de i_0, podemos suponer que $\mathrm{sop}\{\Lambda(b_i)(f)\} \subset V\mathrm{sop}\{f\}$. Si $\lim_i \|\Lambda(b_i)(f) - \Lambda(b)f\|_\infty \neq 0$, existiría un $\varepsilon > 0$, una sub-red $\{b_{i_j}\}_j$ y una red $\{t_j\}_j$ contenida en $V\mathrm{sop}\{f\}$, tales que $\|\Lambda(b_{i_j})(f)(t_j) - \Lambda(b)f(t_j)\| \geqslant \varepsilon$ para todo j. Podemos suponer que $\{t_j\}_j$ tiene límite, llamado t (porque $V\mathrm{sop}\{f\}$ es compacto). En ese caso,

$$\lim_j \|\Lambda(b_{i_j})(f)(t_j) - \Lambda(b)f(t_j)\| = \lim_j \|b_{i_j}f(\pi(b_{i_j})^{-1}t_j) - bf(\pi(b)^{-1}t_j)\| = 0.$$

Lo que contradice la hipótesis. Esto concluye la prueba de que Λ es una representación. Hemos probado la siguiente Afirmación.

Afirmación 1.2.8. *Para cada $b \in \mathcal{B}$ se tiene que $\Lambda(b) \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, y $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ es una representación. Además la función $\mathcal{B} \to C_c(\mathfrak{B}) \mid b \mapsto \Lambda_b(f)$ es continua en $\| \ \|_1$, para toda $f \in C_c(\mathfrak{B})$.*

Definición 1.2.9. Dado un fibrado de Fell $\mathfrak{B}$, la *representación regular* de $C^*(\mathfrak{B})$ es la forma integrada de Λ. A dicha forma integrada también se la denota Λ.

Teorema 1.2.10. *Teorema 3.1 de ([1]) La representación $\widetilde{\Lambda}$ es inyectiva en $C_c(\mathfrak{B})$. Además, para todas $f, g \in C_c(\mathfrak{B})$ se cumple la igualdad $\widetilde{\Lambda}(f)g = f * g$. Lo anterior permite pensar $C_c(\mathfrak{B}) \subset C^*(\mathfrak{B})$, con esa convención tenemos que $\widetilde{\Lambda}(f)g = f * g$ para todas $f, g \in C_c(\mathfrak{B})$.*

Demostración. Dadas $f, g, h \in C_c(\mathfrak{B})$ tenemos que $\langle \widetilde{\Lambda}(f)g, h\rangle = \langle f * g, h\rangle$, lo que se deduce recurriendo al Lema A.1.4 y al Corolario A.2.4. Fijando f y g, como la igualdad vale para toda h y $C_c(\mathfrak{B})$ es denso en $\mathcal{X}$, concluimos que $\widetilde{\Lambda}(f)g = f * g$. Supongamos que $\widetilde{\Lambda}(f) = 0$. En ese caso, por el Lema 1.1.13, deducimos que $f = 0$. Esto prueba que $\widetilde{\Lambda}$ es inyectiva.

Respecto a la segunda parte, si $\iota : \mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu) \to C^*(\mathfrak{B})$ es la inclusión canónica, entonces $\Lambda \circ \iota = \widetilde{\Lambda}$. Como $\widetilde{\Lambda}$ es inyectiva en $C_c(\mathfrak{B})$, ι es inyectiva en $C_c(\mathfrak{B})$. Eso da la inclusión $C_c(\mathfrak{B}) \subset C^*(\mathfrak{B})$. El resto es una consecuencia directa de la definición de la representación regular. $\square$

El teorema anterior nos permite pensar $C_c(\mathfrak{B}) \subset C^*(\mathfrak{B})$ como $*$-subálgebra densa. Esta afirmación, para un C^*-sistema dinámico parcial (A, G, α), se convierte en que podemos pensar $C_c(\mathfrak{B}_\alpha) \subset A \rtimes G$, lo que haremos de ahora en más.

En vista del Teorema anterior, la Proposición 1.2.5 tiene la siguiente consecuencia directa.

Corolario 1.2.11. *Dados un fibrado de Fell $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, G, \pi)$ y una representación $T : \mathcal{B} \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$, existe una única representación $R : C^*(\mathfrak{B}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ tal que*

$$R(f)x = \int_G T(f(t))xd\mu(t) \quad \forall\ f \in C_c(\mathfrak{B}),\ x \in \mathcal{X}_B.$$

Más aún, $R = I(T)$ (la forma integrada de T).

Definición 1.2.12. *C^*-álgebra reducida y producto cruzado reducido:* dado el fibrado de Fell $\mathfrak{B}$ se define la *C^*-álgebra reducida*, que se denota $C^*_r(\mathfrak{B})$, como la imagen de la representación regular. Mientras que para un C^*-sistema dinámico parcial, (A, G, α), se define el *producto cruzado reducido* de A por G, que se denota $A \rtimes_r G$, como $C^*_r(\mathfrak{B}_\alpha)$.

Como lo hicimos antes, podemos pensar $C_c(\mathfrak{B}_\alpha) \subset A \rtimes_r G$ como $*$-subálgebra densa. La misma observación vale para el álgebra reducida de un fibrado de Fell.

Observación 1.2.13. La representación regular da un mapa sobreyectivo de $C^*(\mathfrak{B})$ en $C^*_r(\mathfrak{B})$; por lo tanto $C^*_r(\mathfrak{B})$ es un cociente de $C^*(\mathfrak{B})$. Se dice que el fibrado $\mathfrak{B}$ es promediable si el mencionado mapa es inyectivo. Un C^*-sistema dinámico parcial se dice promediable si su fibrado de Fell asociado lo es.

Para cerrar esta sección veremos un resultado que se acerca al recíproco del Corolario 1.2.11. Por ejemplo, considerando representaciones en espacios de Hilbert es cierto que toda representación de $C^*(\mathfrak{B})$ es la forma integrada de una representación de $\mathfrak{B}$. Esto se basa en que, en los espacios de Hilbert, siempre podemos suponer que las representaciones son no degeneradas.

Teorema 1.2.14. *Si $\mathfrak{B}$ es un fibrado de Fell, entonces existe una representación $T : \mathcal{B} \to M(C^*(\mathfrak{B}))$ tal que:*

1. *La forma integrada de T, $I(T)$, es la inclusión de $C^*(\mathfrak{B})$ en $M(C^*(\mathfrak{B}))$.*

2. *Dada una representación no degenerada $\rho : C^*(\mathfrak{B}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$, si $\overline{\rho} : M(C^*(\mathfrak{B})) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ es la representación inducida por ρ, entonces $\rho = I(\overline{\rho} \circ T)$.*

Demostración. La idea es la expuesta en la la Sección 12 del capitulo VIII de [6]. Dado $a \in \mathcal{B}$ definimos dos mapas de $C_c(\mathfrak{B})$ en sí mismo: $f \mapsto T_a f$ y $f \mapsto fT_a$, definidos respectivamente por $T_a f(t) = af(\pi(a)^{-1}t)$ y $fT_a(t) = \Delta(\pi(a)^{-1})f(t\pi(a)^{-1})a$. Ambas funciones son lineales y acotadas por $\|a\|$ respecto de $\|\ \|_1$. Por lo tanto tienen extensiones únicas a $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$; cálculos de rutina muestran que T_a define un multiplicador de $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B}, \mu)$.

De [6] VIII 1.11 sabemos que todo multiplicador de un álgebra de Banach con unidad aproximada es acotado. Por lo tanto si $\nu : \mathfrak{L}_1(\mathfrak{B},\mu) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una representación, considerando una unidad aproximada $\{e_i\}_i$ de $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B},\mu)$, tenemos que:

$$\|\nu(T_a f)\| = \|\nu(T_a \lim_i e_i f)\| = \| \lim_i \nu(T_a e_i)\nu(f)\| \leqslant \|T_a\| \sup_i \|e_i\| \|\nu(f)\|.$$

Es decir que $f \mapsto T_x f$ está acotada respecto de la C^*-norma maximal de $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{B},\mu)$. Lo mismo sucede para $f \mapsto fT_a$, y por la continuidad de ambas funciones tenemos que T_a define un multiplicador de $C^*(\mathfrak{B})$, al cual llamamos T_a. Tenemos entonces una función $T : \mathcal{B} \to M(C^*(\mathfrak{B})) \mid a \mapsto T_a$, la cual claramente es lineal en cada fibra. Las propiedades $T_aT_b = T_{ab}$ y $T_{a^*} = (T_a)^*$ son fáciles de deducir. Por ejemplo, para la primera basta con probar que ambas funciones coinciden en $C_c(\mathfrak{B})$:

$$T_aT_b(f)(r) = aT_b(f)(\pi(a)^{-1}r) = abf(\pi(b)^{-1}\pi(a)^{-1}r) = (ab)f(\pi(ab)^{-1}r) = T_{ab}f(r)$$

Para terminar de ver que T es una representación hay que probar que es SOT continua. Basta con probar que dada $f \in C_c(\mathfrak{B})$ se tiene que la función $a \mapsto T_af$ es continua. Pero $\|T_af - T_bf\| \leqslant \|T_af - T_bf\|_1 = \|\Lambda(a)f - \Lambda(b)f\|_1$. Como el último término de la ecuación anterior tiende a 0, si a tiende a b, tenemos que T es SOT continua (ver la Afirmación 1.2.8).

Para ver la afirmación *1.* de la tesis basta con mostrar que si $f, g \in C_c(\mathfrak{B})$ entonces $I(T)(fg) = f * g$. Fijadas f y g como antes, tomamos un compacto K que contiene a $\text{sop}\{f\}\text{sop}\{g\}$. Llamaremos $C_K(\mathfrak{B})$ al conjunto de las secciones continuas de $\mathfrak{B}$ con soporte contenido en K, que es un espacio de Banach con la norma del supremo $\| \ \|_K$. Denotaremos $\iota_K : C_K(\mathfrak{B}) \to C_c(\mathfrak{B})$ a la inclusión. Observar que $F : G \to C_K(\mathfrak{B}) \mid t \mapsto T_{f(t)}g$ es una función continua de soporte compacto (ver la demostración de la Afirmación 1.2.8). Podemos entonces integrar F. Dado un $t \in G$, la función $ev_t : C_K(\mathfrak{B}) \to \mathcal{B}_t$ es continua. Por lo tanto

$$ev_t(\int_G F(r)d\mu(r)) = \int_G ev_t(F(r))d\mu(r) = \int_G f(r)g(r^{-1}t)d\mu(t) = (f * g)(t).$$

Hemos probado que $\int_G F(r)d\mu(r) = f * g$. Por otra parte, la inclusión ι_K es acotada respecto de $\| \ \|_1$, y por lo tanto es acotada respecto de la C^*-norma maximal de $C^*(\mathfrak{B})$. Pensando las siguientes igualdades en $C^*(\mathfrak{B})$ tenemos que

$$f * g = \iota_K \left(\int_G F(r)d\mu(r) \right) = \int_G \iota_K(F(r))d\mu(r) = \int_G T_{f(r)}g d\mu(r) = I(T)(f)g.$$

En cuanto a la segunda afirmación, basta con probar que $\rho(f)\rho(g)x = I(\overline{\rho} \circ T)(f)\rho(g)x$ para cualesquiera $g, f \in C_c(\mathfrak{B})$ y $x \in \mathcal{X}_B$. Pero

$$I(\overline{\rho} \circ T)(f)\rho(g)x = \int_G \overline{\rho}(T_{f(t)})\rho(g)xd\mu(t) = \int_G \rho(T_{f(t)}g)xd\mu(t) = \rho\left(I(T)(f)g\right)x = \rho(f)\rho(g)x.$$

□

La propiedad del Teorema anterior es la propiedad universal de $C^*(\mathfrak{B})$.

Teorema 1.2.15. *Dado un fibrado de Fell $\mathfrak{B}$, sea A es una C^*-álgebra tal que:*

1. *Existe una representación $R : \mathcal{B} \to M(A) = \mathfrak{L}(A_A)$ de manera que la imagen de su forma integrada es A.*
2. *Dada una representación no degenerada $\rho : C^*(\mathfrak{B}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$, existe una representación no degenerada $L_\rho : A \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$, tal que si $\overline{L_\rho} : M(A) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ es la extensión de L_ρ, entonces $\rho = I(\overline{L_\rho} \circ R)$.*

Entonces A es isomorfa a $C^*(\mathfrak{B})$.

Demostración. Consideremos la inclusión canónica $\iota : C^*(\mathfrak{B}) \to M(C^*(\mathfrak{B}))$. Por la propiedad 2. de la hipótesis existe una representación no degenerada $L : A \to M(C^*(\mathfrak{B}))$ tal que $\iota = I(\overline{L} \circ R)$. Queremos probar que la imagen de L está contenida en $C^*(\mathfrak{B})$ y que L es la función inversa de $I(R)$. La extensión $\overline{L} : M(A) \to M(C^*(\mathfrak{B}))$ es $* - SOT$ continua porque L es no degenerada (usar el teorema de Cohen-Hewitt). Ahora, si $f \in C_c(\mathfrak{B})$, $I(R)f$ es la integral en la topología $* - SOT$ de la función $t \mapsto R(f(t))$. Esto nos permite deducir las siguientes igualdades, donde todas las integrales son en la topología $* - SOT$,

$$L(I(R)f) = \overline{L}\left(\int_G R(f(t))d\mu(t)\right) = \int_G (\overline{L} \circ R)(f(t))d\mu(t) = I(\overline{L} \circ R)(f) = \iota(f) = f.$$

Como los elementos de la forma $I(R)f$ son densos en A y la imagen de L es cerrada, concluimos que $\mathrm{Im}(L) \subset C^*(\mathfrak{B})$. Lo anterior también prueba que $L \circ I(R)$ es la identidad en $C^*(\mathfrak{B})$, porque $C_c(\mathfrak{B})$ es denso en $C^*(\mathfrak{B})$. Por lo tanto $I(R)$ es inyectiva, pero también es sobreyectiva, entonces es un isomorfismo. Además, $L = I(R)^{-1}$, porque $L \circ I(R) = id_{C^*(\mathfrak{B})}$. □

Los últimos dos teoremas dan la propiedad universal de $C^*(\mathfrak{B})$. La cual es análoga a la propiedad universal del producto cruzado (por acciones globales) enunciada en el Teorema 2.61 de [12], el cual se atribuye a Raeburn.

Una consecuencia inmediata de los teoremas previos es que si $T : \mathcal{B} \to M(C^*(\mathfrak{B}))$ es la representación universal y $\Lambda_r : C^*(\mathfrak{B}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ es la representación regular, entonces la representación regular del fibrado, $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathfrak{L}(\mathcal{X})$, es $\overline{\Lambda_r} \circ T$. Esto se vuelve claro si escribimos las fórmulas de T y Λ en los elementos de $C_c(\mathfrak{B})$.

1.2.1. Representaciones covariantes

Manteniendo la analogía con las acciones globales queremos una definición análoga a la de par covariante, de manera que a partir de estos pares obtengamos representaciones del producto cruzado parcial. En general no podemos asegurar que de esta manera se obtienen todas las representaciones, pero en algún caso esto será verdad. El primer paso es definir una representación parcial de un grupo.

Definición 1.2.16. Una función $U : G \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ $t \mapsto U_t$, donde $\mathcal{X}_B$ es un $B-$módulo de Hilbert, es una *representación parcial* de un grupo topológico G si:

- $U_e = Id_{\mathcal{H}}$.
- $U_t^* = U_{t^{-1}}$ para todo $t \in G$.
- $U_{t^{-1}} U_t U_s = U_{t^{-1}} U_{ts}$ para todo $t, s \in G$.
- U es SOT continua, es decir que dado $x \in \mathcal{X}_B$, la función $G \to \mathcal{X}_B$ $t \mapsto U_t x$ es continua.

Esta definición implica que U es $* - SOT$ continua y también que U_t es una isometría parcial ya que: $U_t U_t^* U_t = U_t U_{t^{-1}} U_t = U_t U_e = U_t$.

Observar que toda representación unitaria del grupo G es también una representación parcial. Estamos en condiciones de definir un par covariante para las acciones parciales.

Definición 1.2.17. Dado un C^*-sistema dinámico parcial (A, G, α), un *par covariante parcial* (π, U) consta de una representación $\pi : A \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ y una representación parcial $U : G \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$, de manera que para todo $t \in G$ y $a \in A_{t^{-1}}$ se cumple que:

$$\pi(\alpha_t(a)) = U_t \pi(a) U_t^* \quad \text{y} \quad U_t U_t^*(\mathcal{X}_B) = \pi(A_t)\mathcal{X}_B.$$

Observación 1.2.18. Si $\nu : C \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ es una representación de la C^*-álgebra C, el conjunto $\nu(C)\mathcal{X}_B$ es el formado por los elementos de la forma $\nu(c)x$, con $c \in C$ y $x \in \mathcal{X}$. De acuerdo al Teorema de Cohen-Hewitt $\nu(C)\mathcal{X}_B = \overline{\operatorname{span}}\{\nu(c)x \mid c \in C,\ x \in \mathcal{X}_B\}$.

En general, si $B = \mathbb{C}$ para el par covariante (π, U) denotaremos $\mathcal{H}_\pi$ al espacio de Hilbert donde representamos A, es decir $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$.

En caso que tengamos un sistema global, la condición $U_t U_t^*(\mathcal{X}_B) = \pi(D_t)\mathcal{X}_B,\ \forall\ t \in G$ es simplemente que π sea no degenerada.

Afirmación 1.2.19. *En las condiciones de la definición anterior, dados $t \in G$ y $a \in A_t$ se cumple que $\pi(a) = U_t U_t^* \pi(a) U_t U_t^* = U_t U_t^* \pi(a) = \pi(a) U_t U_t^*$.*

Demostración. Observar que como U_t es una isometría parcial, la primera igualdad implica las demás. Ahora:

$$\pi(a) = \pi(\alpha_t \alpha_{t^{-1}}(a)) = U_t \pi(\alpha_{t^{-1}}(a)) U_t^* = U_t U_{t^{-1}} \pi(a) U_{t^{-1}}^* U_t^* = U_t U_t^* \pi(a) U_t U_t^*.$$

□

Recordar que, dada una isometría $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, su espacio inicial y final son respectivamente $S^*S\mathcal{H}$ y $SS^*\mathcal{H}$. De acuerdo a la Afirmación anterior, dado $a \in A_t$ el operador $\pi(a)$ deja invariante el espacio final de U_t y es nulo en su ortogonal.

Afirmación 1.2.20. *Si* (A, G, α) *es un* C^**−sistema dinámico parcial y* (π, U) *es un par covariante, entonces el mapa* $T_{\pi U} : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{L}(\mathcal{X}_B)$ $(a, t) \mapsto \pi(a)U_t$ *es una representación.*

Demostración. Claramente $T_{\pi U}$ es lineal en cada fibra, y también es fácil ver que es continua. Veamos que preserva el producto y la involución; si $(a, t), (b, s) \in \mathfrak{B}_\alpha$:

$$\begin{aligned}
T_{\pi U}((a,t)(b,s)) &= T_{\pi U}(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a)b), ts) = \pi(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a)b))U_{ts} = \pi(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a)b))U_tU_{t^{-1}}U_{ts} \\
&= \pi(\alpha_t(\alpha_{t^{-1}}(a)b))U_tU_s = U_t\pi(\alpha_{t^{-1}}(a)b)U_t^*U_tU_s = U_t\pi(\alpha_{t^{-1}}(a)b)U_s \\
&= U_t\pi(\alpha_{t^{-1}}(a))\pi(b)U_s = U_tU_t^*\pi(a)U_t\pi(b)U_s = \pi(a)U_t\pi(b)U_s \\
&= T_{\pi U}(a,t)T_{\pi U}(b,s). \\
T_{\pi U}((a,t)^*) &= T_{\pi U}(\alpha_{t-1}(a^*), t^{-1}) = \pi(\alpha_{t-1}(a^*))U_{t^{-1}} = U_t^*\pi(a)^*U_tU_t^* = U_t^*\pi(a)^* \\
&= (\pi(a)U_t)^* = T_{\pi U}(a,t)^*.
\end{aligned}$$

□

En vista del resultado anterior y de 1.2.11 , tenemos que cada par covariante da lugar a una representación del producto cruzado.

Definición 1.2.21. Dados un C^*−sistema dinámico parcial (A, G, α) y un par covariante (π, U), definimos $\pi \rtimes U$ como la forma integrada de $T_{\pi U}$.

A priori, la correspondencia entre los pares covariantes y las representaciones no degeneradas, no tiene por qué ser uno a uno. Sabemos que éste es el caso de los productos cruzados por acciones globales (ver por ejemplo [12]). En esa situación lo que sucede es que la representación del fibrado asociado, $T : \mathfrak{B}_\alpha \to M(A \rtimes G)$, es una representación de la forma $T_{\pi U}$, donde $\pi = i_A$ y $U = i_G$ usando la notación de [12] (II Proposición 2.34.). En general podemos decir que si la representación universal del fibrado se escribe como $T_{\pi u}$, entonces toda representación no degenerada proviene de un par covariante.

1.3. Morfismos

Es de esperar que C^*-sistemas dinámicos "equivalentes" den lugar a productos cruzados isomorfos. He aquí una noción de sistemas equivalentes.

Definición 1.3.1. Un *morfismo* del C^*-sistema dinámico (A, G, α) en el (B, G, β) es un morfismo de C^*-álgebras $\pi : A \to B$, de manera que para cada $t \in G$ se tiene que $\pi(A_t) \subset B_t$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A_{t^{-1}} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha_t"'] & B_{t^{-1}} \arrow[d, "\beta_t"] \\
A_t \arrow[r, "\pi"'] & B_t
\end{tikzcd}$$

La composición de morfismos es la composición de funciones. Se puede ver que π es un isomorfismo si es invertible como función y su inversa es un morfismo. Usamos la notación $(A, G, \alpha)\overrightarrow{\pi}(B, G, \beta)$ para indicar que π es un morfismo entre los sistemas correspondientes.

Teorema 1.3.2. *Dado un morfismo entre C^*-sistemas dinámicos parciales $(A, G, \alpha)\overrightarrow{\pi}(B, G, \beta)$, existe un único homomorfismo $\overline{\pi} : A \rtimes G \to B \rtimes G$ tal que $\overline{\pi}(f) = \pi \circ f\ \forall\ f \in C_c(\mathfrak{B})$. Es más, si π es un isomorfismo, entonces $\overline{\pi}$ también lo es.*

Demostración. Definamos $\pi_0 : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathfrak{B}_\beta$ mediante $\pi_0(a, t) := (\pi(a), t)$. Es inmediato que π_0 es continuo, lleva la suma de $\mathfrak{B}_\alpha$ en la de $\mathfrak{B}_\beta$, así como el producto por escalares, la involución * y el producto. Ahora definimos $\widetilde{\pi} : C_c(\mathfrak{B}_\alpha) \to C_c(\mathfrak{B}_\beta)$ $f \mapsto \pi \circ f$. De acuerdo a las observaciones anteriores, $\widetilde{\pi}$ es un morfismo contractivo de $*-$álgebras que induce un único morfismo $\overline{\pi} : A \rtimes G \to B \rtimes G$, el cual coincide con $\widetilde{\pi}$ en $C_c(\mathfrak{B}_\alpha)$.

Respecto a la segunda parte, si π es un isomorfismo se prueba que la función inversa de $\overline{\pi}$ es $\overline{\pi^{-1}}$. Por lo tanto $\overline{\pi}$ es un isomorfismo de C^*-álgebras. □

1.4. Acciones envolventes y equivalencia de Morita-Rieffel

La forma de obtener un sistema dinámico parcial a partir de uno global es restringiendo a un abierto. Es decir, consideremos el sistema dinámico global (X, G, β) y un abierto $U \subset X$. Para cada $t \in G$ definimos $U_t = U \cap \beta_t(U)$ y $\alpha_t : U_{t^{-1}} \to U_t$ tal que $x \mapsto \beta_t(x)$. En esta situación (U, G, α) es un sistema dinámico parcial, que llamamos la restricción de (X, G, β) a U. En general no todo sistema dinámico parcial se obtiene de esta forma[4]. Pero para los que sí se obtienen, si además se pide que la órbita de U por β sea X, entonces la terna (X, G, β) es única a menos de isomorfismos.

Definición 1.4.1. Un *morfismo* entre los sistemas dinámicos parciales (X, G, β) e (Y, G, μ) es una función continua $f : X \to Y$, tal que para cada $t \in G$ se cumple que $f(X_t) \subset Y_t$ y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X_{t^{-1}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_t"'] & Y_{t^{-1}} \arrow[d, "\mu_t"] \\ X_t \arrow[r, "f"'] & Y_t. \end{tikzcd}$$

La composición de morfismos es la composición de funciones. Por lo tanto un isomorfismo es un morfismo biyectivo, tal que su inversa es un morfismo. Observar que la definición tiene sentido para cualquier acción parcial continua, no solo de grupos HLC en espacios HLC.

[4]Porque en nuestra definición de sistema dinámico (global o parcial, ver 1.1) requerimos que un grupo HLC actúe en un espacio HLC. Si, en cambio, consideramos solamente acciones parciales continuas de grupos topológicos en espacios topológicos, entonces es cierto que todo sistema parcial se obtiene de restringir uno global (como se hizo al inicio).

El siguiente resultado resume que se encuentran en [1].

Teorema 1.4.2. *Sea α una acción parcial continua de un grupo topológico G en el espacio topológico X, ambos de Hausdorff pero no necesariamente localmente compactos. En esta situación existen un espacio topológico X^e, una acción global continua de G en X^e, llamada α^e, y una función continua $\iota_X : X \to X^e$ tales que:*

1. *$\iota_X(X)$ es un abierto de X^e cuya órbita es X^e.*
2. *ι_X es un isomorfismo entre α y la restricción de α^e a $\iota_X(X)$.*
3. *Dada una acción global continua β de G en un espacio topológico de Hausdorff[5] Y, y un morfismo $f : (X, G, \alpha) \to (Y, G, \beta)$, existe un único morfismo $\overline{f} : (X^e, G, \alpha^e) \to (Y, G, \beta)$ tal que $\overline{f} \circ \iota_X = f$.*
4. *X^e es de Hausdorff si y solamente si el gráfico de α, $Gr(\alpha) := \{(t, x, y) \in G \times X \times X : (t, x) \in \Gamma,\ \alpha_t(x) = y\}$, es cerrado en $G \times X \times X$. Por otra parte, si tanto G como X son HLC, entonces X^e es localmente compacto.*

Como consecuencia de los tres primeros puntos, la terna (X^e, G, α^e) es única a menos de isomorfismos.

Observación 1.4.3. *Construcción de X^e [1]:* En $G \times X$ se define la relación de equivalencia $(t, x) \sim (s, y)$ sii $(s^{-1}t, x, y) \in \mathrm{Gr}(\alpha)$. El espacio X^e es el cociente $G \times X/\sim$, y si $\pi : G \times X \to X^e \mid (t, x) \mapsto [t, x]$ es la proyección en el cociente, entonces $\iota_X : X \to X^e$ es $x \mapsto [e, x]$. La acción de G en X^e está dada por $t \cdot [s, y] = [ts, y]$. Con esta construcción se prueba el teorema anterior.

A la clase de isomorfismo de (X^e, G, α^e) del teorema se le llama acción envolvente de (X, G, α) y a X^e espacio envolvente. Una consecuencia inmediata es que un sistema dinámico parcial tiene como envolvente un sistema dinámico global si y solamente si el gráfico de la acción parcial es cerrado (en el sentido del punto 4. del teorema anterior). En ese caso diremos que tiene acción envolvente.

Si nos restringimos a espacios HLC, la noción de morfismo, a través de la correspondencia entre espacios topológicos y C^*-álgebras conmutativas, es la definida en 1.3.1.

Restringir una acción a un abierto de X corresponde a restringir una acción a un ideal de $C_0(X)$. Si (B, G, β) es un C^*-sistema dinámico y $A \triangleleft B$, para cada $t \in G$ definimos

$$A_t := A \cap \beta_t(A), \quad \alpha_t : A_{t^{-1}} \to A_t \mid a \mapsto \beta_t(a).$$

Como antes, llamamos a (A, G, α) la restricción de (B, G, β) a A. La condición de que la órbita de U sea X corresponde a pedir que $[A] := \mathrm{span}\{\beta_t(A) :\ t \in G\}$ sea denso en B.

[5]Suponer que es de Hausdorff no es necesario.

No todo C^*-sistema dinámico parcial se obtiene de esta forma, ya que eso implicaría que todo sistema dinámico en un espacio HLC tiene como espacio envolvente un espacio HLC (ver [1]). Esta no es la situación general, como muestra este ejemplo de [1]: sean $X = [1,2]$, $G = \mathbb{Z}_2$, $\alpha_0 = id_X$ y $\alpha_1 = id_{[1,\frac{1}{2})}$. Es fácil ver que el gráfico de α no es cerrado.

Definición 1.4.4. Un C^*-sistema dinámico (A, G, α) tiene *acción envolvente* si existen un C^*-sistema dinámico global (B, G, β), y un ideal J de B, de manera que la restricción de (B, G, β) a J es isomorfo a (A, G, α), y además $[J]$ es denso en B. A la terna (B, G, β) se le llama envolvente de (A, G, α).

Proposición 1.4.5. *([1]) Dos envolventes de un mismo C^*-sistema dinámico parcial son necesariamente isomorfas.*

Desde el punto de vista de los fibrados, el fibrado asociado al sistema parcial corresponde a un sub-fibrado del fibrado asociado al sistema envolvente.

Definición 1.4.6. Un *sub-fibrado* de un fibrado de Banach $(\mathfrak{B}, X, \pi)$ es un sub-conjunto $\mathcal{E} \subset \mathfrak{B}$ tal que $\mathcal{E} \cap \mathfrak{B}_x$ es un sub-espacio de Banach para cada $x \in X$, y además $(\mathcal{E}, X, \pi|_{\mathcal{E}})$ es un fibrado de Banach con la estructura obtenida de restringir la de $(\mathfrak{B}, X, \pi)$.

En cambio, si $(\mathfrak{B}, X, \pi)$ es un fibrado de Fell, decimos que $\mathcal{E}$ es un *sub-fibrado de Fell* si es un sub-fibrado de Banach y es cerrado por la involución y el producto de $(\mathfrak{B}, X, \pi)$.

Supongamos que (A, G, α) es un C^*-sistema dinámico parcial que tiene acción envolvente (B, G, β). Para determinar $A \rtimes G$, recurriendo a 1.3.2, podemos suponer que $A \triangleleft B$ y que $[A]$ es denso en B. Observar que $\mathfrak{B}_\alpha$ es un sub-fibrado de Fell de $\mathfrak{B}_\beta$. Además si $\mathcal{E} := A \times G \subset \mathfrak{B}_\beta$, entonces $\mathcal{E}$ es un sub-fibrado de Banach.

Afirmación 1.4.7. *En las condiciones anteriores se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\mathfrak{B}_\alpha \mathcal{E} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{E}\mathcal{E}^* \subset \mathfrak{B}_\alpha$, $\mathcal{E}\mathfrak{B}_\beta \subset \mathcal{E}$.
2. *Para cada $t \in G$ se tiene que $\mathcal{E}_t^* \mathcal{E}_t \mathcal{E}_t \subset \mathcal{E}_t$, que $(\mathfrak{B}_\beta)_t = \overline{span}\{\mathcal{E}^*\mathcal{E} \cap (\mathfrak{B}_\beta)_t\}$ y que $\mathcal{E}_t^*\mathcal{E}_t$ es un ideal de $(\mathfrak{B}_\beta)_e$.*

Demostración. Las propiedades de *1.* son prácticamente inmediatas.

Para la primera afirmación de *2.* supongamos que $a, b, c \in A$, $t \in G$. En este caso

$$(a,t)^*(b,t)(c,t) = (\beta_{t^{-1}}(a^*b), e)(c,t) = (\beta_{t^{-1}}(a^*b)c, t),$$

y es claro que $\beta_{t^{-1}}(a^*b)c \in A$. Para la segunda, consideremos $t \in G$ fijo, y tomemos $a, b \in A$, $r \in G$. Los elementos de la forma $(a, rt^{-1})^*(b, r)$ son todos los de $\mathcal{E}^*\mathcal{E} \cap (\mathfrak{B}_\beta)_t$, pero $(a, rt^{-1})^*(b, r) = (\beta_{tr^{-1}}(a^*b), t)$. Variando a, b y r en la primera coordenada obtenemos la órbita de A, que genera un espacio denso de B.

Finalmente, observamos que $(a,t)^*(b,t) = (\beta_{t^{-1}}(a^*b), e)$, con lo que concluimos que $\mathcal{E}_t^*\mathcal{E}_t$ corresponde al ideal $\beta_{t^{-1}}(A)$, puesto que todo elemento de A se escribe como un producto de dos elementos de A (Teorema de Cohen-Hewitt). $\square$

La afirmación anterior nos coloca en las hipótesis del siguiente teorema, que no demostraremos completamente. Este resultado es el Teorema 1.1 de [3], con algunas hipótesis adicionales. Recordar que un ideal derecho $\mathcal{E}$ de un fibrado de Fell $\mathcal{B}$ es un sub-fibrado de Banach tal que $\mathcal{E}\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$.

Teorema 1.4.8. *Sea $\mathcal{B} = (B_t)_{t\in G}$ un fibrado de Fell sobre un grupo HLC, $\mathcal{A} = (A_t)_{t\in G}$ un sub-fibrado de Fell y $\mathcal{E} = (E_t)_{t\in G}$ un ideal derecho de $\mathcal{B}$ tal que:*

- *$\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{A}\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}\mathcal{E}^* \subset \mathcal{A}$.*
- *Para cada $t \in G$ se cumple que: $E_t^* E_t E_t \subset E_t$, que $B_t = \overline{span}\{\mathcal{E}^*\mathcal{E} \cap B_t\}$ y que $E_t^* E_t \triangleleft \mathcal{B}_e$.*

En esa situación, la completación de $\mathfrak{L}^1(\mathcal{E})$ en $C^*(\mathcal{B})$ es un bimódulo que implementa una equivalencia de Morita-Rieffel entre $C^*(\mathcal{A})$ y $C^*(\mathcal{B})$. Además, $C^*(\mathcal{A})$ es isomorfa a la C^*-álgebra generada por $\mathfrak{L}^1(\mathcal{A})$ en $C^*(\mathcal{B})$, la cual es una C^*-subálgebra hereditaria plena de $C^*(\mathcal{B})$.

Antes de la demostración establecemos algunos resultados.

Afirmación 1.4.9. *En las hipótesis de 1.4.8, sea*

$$D := \{c_1^* c_1 + \cdots + c_n^* c_n : \ c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{E},\ n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Entonces existe una unidad aproximada fuerte de $\mathcal{B}$ contenida en D.

Notación 1.4.10. Si C es una C^*-álgebra, C_+ es el cono de sus elementos positivos.

Demostración. Para cada $t \in G$ definimos $I_t := E_t^* E_t$. La hipótesis implica que $\sum_t I_t$ es denso en B_e. Dados $b \in B_e$, $b \geqslant 0$ y $\varepsilon > 0$, podemos aproximar $b^{\frac{1}{2}}$ por un elemento de $I_{t_1} + \cdots + I_{t_n}$, para ciertos $t_1, \ldots, t_n \in G$. Como consecuencia existe $a \in (I_{t_1} + \cdots + I_{t_n})_+$ tal que $\|b - a\| < \varepsilon$. De acuerdo a la Proposición 1.5.9 de [7] existen $a_i \in (I_{t_i})_+$ tales que $a = a_1 + \cdots + a_n$. Cada a_i es de la forma $(c^*d)^*(c^*d)$ para ciertos $c, d \in E_{t_i}$, aquí c^*d es $a^{\frac{1}{2}}$. Pero

$$(c^*d)^*(c^*d) = d^*cc^*d = ((cc^*)^{\frac{1}{2}}d)^*((cc^*)^{\frac{1}{2}}d).$$

Notar que $(cc^*)^{\frac{1}{2}} \in E_t^* E_t$, y por lo tanto $(cc^*)^{\frac{1}{2}}d \in E_t^* E_t E_t \subset E_t$. Concluimos que para cada i existe $c_i = (cc^*)^{\frac{1}{2}}d \in E_{t_i}$ tal que $a_i = c_i^* c_i$. En definitiva existen $c_1, \ldots, c_n \in \mathcal{E}$ tales que $\|c_1^* c_1 + \cdots + c_n^* c_n - b\| < \varepsilon$. Hemos probado que D es denso en $(B_e)_+$.

Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ la unidad aproximada canónica de B_e (todos los elementos positivos de norma menor o igual a 1). Definimos $J := \{(\varepsilon, i) : 0 < \varepsilon < 1,\ i \in I\}$, ordenado según $(\varepsilon, i) \leqslant (\varepsilon', i')$ sii $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ y $i \leqslant i'$. De acuerdo a lo visto arriba, para cada $j = (\varepsilon, i)$ existe un $d_j \in D$ tal que $\|d_j - e_i\| < \varepsilon$. Puede demostrarse fácilmente que $\{d_j\}_{j\in J}$ es una unidad aproximada, en el sentido de álgebras de Banach, incluida en D.

Por otro lado, $\text{lím}_j \|d_j\| = 1$ pues $\text{lím}_i \|e_i\| = 1$. Con lo que hemos probado y la Proposición 1.1.12, concluimos que $(\frac{1}{\|d_j\|} d_j)_{j\in J}$ es una unidad aproximada fuerte de $\mathcal{B}$ contenida en D (porque D es un cono). $\square$

Afirmación 1.4.11. *Sea β una base de entornos precompactos simétricos de la identidad de G. Para cada $V \in \beta$ tomamos $f_V \in C_c(G)_+$ tal que $sop\{f_V\} \subset V$ y $\int_G f_V dt = 1$. Dados $g \in C_c(\mathcal{B})$, $r \in G$ y $V \in \beta$, se define $g_{V,r}(t) := \Delta(rt^{-1})f_V(r^{-1}t)g(t)$. Entonces, para cualquier $\xi \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{B})$, se cumple que $\lim_V (g_{V,r})^* * g_{V,r} * \xi = g(r)^* g(r)\xi$ en $\| \ \|_1$.*

Demostración. Primero consideramos $\xi \in C_c(\mathcal{B})$ y calculamos $g_{V,r} * \xi$. Si $t \in G$ tenemos:

$$g_{V,r} * \xi(t) = \int_G \Delta(rs^{-1})f_V(r^{-1}s)g(s)\xi(s^{-1}t)ds = \int_G f_V(r^{-1}s)\Delta(rs^{-1})g(s)\xi(s^{-1}t)ds.$$

Definiendo $b(s,t) := \Delta(rs^{-1})g(s)\xi(s^{-1}t)$ y acudiendo al Lema 3.2 de [1] tenemos que $g_{V,r} * \xi$ converge en el límite inductivo (ver 3.1.4) a la función $b_r(t) = g(r)\xi(r^{-1}t)$. Ahora calculamos $(g_{V,r})^* * b_r$,

$$(g_{V,r})^* * b_r(t) = \int_G \Delta(r)f_V(r^{-1}s^{-1})g(s^{-1})^* b_r(s^{-1}t)dt = \int_G f_V(r^{-1}s)\Delta(rs^{-1})g(s)^* b_r(st)dt.$$

Recurriendo al resultado mencionado antes, tenemos que $(g_{V,r})^* * b_r$ converge en el límite inductivo (ver 3.1.4) a la función $\eta(t) = g(r)^* b_r(rt) = g(r)^* g(r)\xi(t)$. Ahora observamos que la familia $\{g_{V,r}\}_{V\in\beta}$ está uniformemente acotada. Usando esto último y que la convergencia en el límite inductivo implica la convergencia en $\| \ \|_1$, tenemos que:

$$0 \leqslant \lim_V \|(g_{V,r})^* * g_{V,r} * \xi - \eta\|_1 \leqslant \lim_V \|(g_{V,r})^*\|_1 \ \|g_{V,r} * \xi - b_r\|_1 + \lim_V \|(g_{V,r})^* b_r - \eta\|_1 = 0.$$

Usando que $C_c(\mathfrak{B})$ es denso en $\mathfrak{L}^1(\mathcal{B})$, que $\{g_{V,r}\}_{V\in\beta}$ está uniformemente acotada, y lo que acabamos de probar, concluimos la tesis utilizando argumentos de densidad y la desigualdad triangular.

□

Proposición 1.4.12. *En las hipótesis de 1.4.8 existe una unidad aproximada de $\mathfrak{L}^1(\mathcal{B})$, $(e_j)_{j\in J}$, (no necesariamente acotada[6]) de manera que para cada $j \in J$ existen $g_1^j, \ldots, g_n^j \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{E})$ tales que $e_j = \sum_i (g_i^j)^* * g_i^j$.*

Demostración. Sea $(f_i)_{i\in I}$ una unidad aproximada fuerte de B_e contenida en D (Afirmación 1.4.9). Para cada $\xi \in C_c(\mathcal{B})$ se cumple que $\lim_i f_i\xi = \xi$ en la topología del límite inductivo (ver 3.1.4), y por lo tanto también en $\| \ \|_1$. Como además $\|f_i\| \leqslant 1 \ \forall \ i \in I$, tenemos que $\lim_i f_i\xi = \xi$ en $\mathfrak{L}^1(\mathcal{B})$, para toda $\xi \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{B})$. Para cada $i \in I$ tomamos $c_{i,1}, \ldots, c_{i,n} \in \mathcal{E}$ tales que $f_i = c_{i,1}^* c_{i,1} + \cdots + c_{i,n}^* c_{i,n}$. Denotamos $t_{i,k} := \pi(c_{i,k})$. Como $\mathcal{E}$ es un fibrado de Banach, para cada $c_{i,k}$ existe $g_{i,k} \in C_c(\mathcal{E})$ tal que $g_{i,k}(t_{i,k}) = c_{i,k}$. Sea β una base de entornos como en 1.4.11; para cada $(V,i) \in \beta \times I$ definimos $g_{V,i} := \sum_k ((g_{i,k})_{V,t_{i,k}})^* * (g_{i,k})_{V,t_{i,k}}$.

[6] Puede arreglarse para que sea acotada, pero no necesitaremos este hecho.

Ahora dados $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{B})$ y $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $i \in I$ tal que $\max\{\|\xi_k - f_i\xi_k\|_1 : k = 1, \ldots, n\} < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, por 1.4.11 existe $V_0 \in \beta$ tal que $\|g_{V_0,i} * \xi_k - f_i\xi_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo k. En definitiva, $\max\{\|\xi_k - g_{V_0,i} * \xi_k\|_1 : \ k = 1, \ldots, n\} < \varepsilon$. Si F es la familia de los subconjuntos finitos de $\mathfrak{L}^1(\mathcal{B})$, definimos $J := F \times (0, +\infty)$ ordenado en forma creciente en F y decreciente en $(0, +\infty)$. Tenemos que para $j = (U, \varepsilon)$ existe $h_j = g_{V,i}$ tal que $\max\{\|h_j * u - u\|_1 : \ u \in U\} < \varepsilon$. La unidad aproximada que buscamos es $(h_j)_{j\in J}$. $\square$

Comenzamos la parte de la prueba de 1.4.8 que desarrollaremos aquí.

Demostración. Si observamos la demostración de [3], notamos que se debe probar que, dado $\xi \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{E})$, se cumple que $\xi * \xi^*$ es positivo en $C^*(\mathcal{A})$. Probaremos este hecho y luego nos remitiremos a la prueba mencionada.

Sea $(h_j)_{j\in J}$ una unidad aproximada como la dada en 1.4.12. Dada $\xi \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{E})$ sabemos que $\lim_j \|\xi * \xi^* - \xi * (\xi * h_j)^*\|_1 = 0$, y por lo tanto basta con probar que $\xi * (\xi * h_j)^*$ es positivo en $C^*(\mathcal{A})$. Fijemos $j \in J$ y supongamos que $h_j = \sum_k g_k^* * g_k$. Tenemos que

$$\xi * (\xi * h_j)^* = \xi * \sum_k (\xi * g_k^* * g_k)^* = \sum_k \xi * g_k^* * g_k * \xi^* = \sum_k (\xi * g_k^*) * (\xi * g_k^*)^*.$$

El último término es positivo en $C^*(\mathcal{A})$ porque $\xi * g_k^* \in \mathfrak{L}^1(\mathcal{A})$ para cada k (esto último es por el Teorema 3.2 de [1]). $\square$

Corolario 1.4.13. *Si (A, G, α) es un sistema dinámico parcial con acción envolvente (B, G, β), entonces $A \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a $B \rtimes G$. Más aún: $A \rtimes G$ es isomorfa a una C^*-subálgebra hereditaria plena de $B \rtimes G$.*

Demostración. Esto es consecuencia de combinar 1.4.7, 1.4.8 y 1.3.2. $\square$

Capítulo 2

Acciones parciales en fibrados de C^*-álgebras

La primera parte de este capítulo resume varias propiedades de las acciones parciales que serán necesarias para, posteriormente, demostrar la generalización del Teorema Simétrico de Imprimitividad de Raeburn, que es el objetivo del presente trabajo.

El Teorema de Raeburn trata de acciones en espacios topológicos y en C^*-álgebras. Lo que haremos en este capítulo es combinar estas nociones para definir las acciones en fibrados de C^*-álgebras. De allí pasaremos a las acciones parciales.

2.1. Propiedades de las acciones parciales

El espacio de órbitas

Definición 2.1.1. Si X es un espacio topológico y G es un grupo que actúa parcialmente en X, definimos el *espacio de órbitas* X/G como el espacio cociente, con la topología cociente, que resulta de considerar en X la relación $x \sim y$ sii $\exists\ t \in G: \ x \in X_{t^{-1}},\ t \cdot x = y$.

Lema 2.1.2. *En la situación de la definición anterior, el mapa cociente $\pi : X \to X/G$ tal que $x \mapsto Gx$ es abierto. Además, si X es localmente compacto (todo punto tiene una base de entornos compactos) entonces X/G también lo es y, dado un compacto $T \subset X/G$, existe un compacto $D \subset X$ tal que $T \subset GD$. Si, adicionalmente, X/G es de Hausdorff, puede encontrarse D compacto tal que $GD = T$.*

Demostración. Probar que el mapa cociente es abierto es equivalente a probar que la saturación de un abierto es abierta. Si $U \subset X$ es abierto, su saturación es la unión de los conjuntos de la forma $t \cdot (U \cap X_{t^{-1}})$, con t variando en G. Claramente, cada uno de estos conjuntos es abierto.

Para ver que X/G es localmente compacto procedemos como sigue. Sea W un entorno de Gx; entonces $\pi^{-1}(W)$ es un entorno de x, y, como X es localmente compacto, existen un abierto

V y un compacto C tales que $x \in V \subset C \subset \pi^{-1}(W)$. Aplicando π a la secuencia anterior: $Gx \in \pi(V) \subset \pi(C) \subset W$. Por la parte anterior, $\pi(V)$ es abierto, y como π es continua, $\pi(C)$ es compacto.

Para probar la última afirmación tomamos un compacto $T \subset X/G$. Para cada punto $y \in T$ existe un entorno compacto $C_y \subset X$ tal que $\pi(C_y)$ es un entorno de y. Como T es compacto existen $y_1, \ldots, y_n$ tales que $T \subset \pi(C_{y_1}) \cup \cdots \cup \pi(C_{y_n})$. Por lo tanto $C := C_{y_1} \cup \cdots \cup C_{y_n}$ es un compacto en X tal que $T \subset \pi(C)$. En el caso en que X/G es Hausdorff, T es cerrado y $D := \pi^{-1}(T) \cap C$ es compacto (es cerrado en un compacto) y además $\pi(D) = T$. □

El siguiente resultado es muy útil en varias ocasiones, su prueba se encuentra en la sección 13.2 Cap. II de [6].

Lema 2.1.3. *Sean X e Y espacios topológicos y $p : X \to Y$ una función sobreyectiva. Entonces p es abierta si y sólo si dados $x \in X$ y una red $\{y_i\}_i \subset Y$ tal que $y_i \to p(x)$, existen una subred $\{y_{i_j}\}_j$ y una red $\{x_j\}_j \in X$ convergente a x, tales que $p(x_j) = y_{i_j}$ para todo j.*

Corolario 2.1.4. *Si G actúa parcialmente en el espacio topológico X, entonces dada una red en el espacio de órbitas, $\{Gx_i\}_i$, convergente a Gy, existen una subred $\{x_{i_j}\}_j$ y una red $\{t_j\}_j \subset G$ tales que $x_{i_j} \in X_{t_j^{-1}}$ $\forall\, j$, y $\lim_j t_j \cdot x_{i_j} = y$.*

Acciones parciales propias

En general, decimos que una función entre espacios topológicos es propia si la preimagen de todo compacto es compacta.

Definición 2.1.5. La acción parcial de G en X es *propia* si lo es la función

$$\Gamma := \{(t, x) \in G \times X : \ x \in X_{t^{-1}}\} \to X \times X \quad (t, x) \mapsto (x, t \cdot x).$$

Si la acción es global, una condición suficiente para que sea propia es que el grupo sea compacto.

Observación 2.1.6. Si la acción parcial es propia, dados dos compactos $C, D \subset X$, se tiene que $\{t \in G : \ t \cdot (X_{t^{-1}} \cap C) \cap D \neq \emptyset\}$ es compacto. Esto es porque dicho conjunto es la proyección sobre G de la preimagen por la acción parcial del compacto $C \times D$.

Lema 2.1.7. *La acción parcial de G en X (ambos HLC) es propia si y solamente si dada una red $\{(t_i, x_i)\}_i \subset \Gamma$ tal que $\{(x_i, t_i \cdot x_i)\}_i$ es convergente, existen una subred $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$ y $(t, x) \in \Gamma$ tales que $(t_{i_j}, x_{i_j}) \to (t, x)$.*

Demostración. Supongamos que la acción parcial es propia, y tomemos una red como la de la tesis que converge a cierto (x, y). Como X es localmente compacto existen entornos compactos U, V de x, y respectivamente. El conjunto $\{(r, z) \in \Gamma : \ (z, r \cdot z) \in U \times V\}$ es compacto en Γ y, además, a partir de cierto índice i_0 contiene a la red que consideramos al principio. Para concluir tomamos una subred convergente (a un punto de Γ).

Recíprocamente, sea K un compacto de $X \times X$; sabemos que existen compactos $C, D \subset X$ tales que $K \subset C \times D$. Si la preimagen de $C \times D$ es compacta, entonces la de K también lo será (porque K es cerrado y por lo tanto su preimagen será cerrada, e incluida en un compacto). Con esto concluimos que basta con considerar compactos de la forma $C \times D$.

Sean $C, D \subset X$ compactos (no vacíos). Tomemos una red $\{(t_i, x_i)\}_i \subset W := \{(r,z) \in \Gamma : (z, r \cdot z) \in C \times D\}$. Observar que W es cerrado por ser la preimagen de $C \times D$ por una función continua ($C \times D$ es compacto en un espacio de Hausdorff). Tenemos que $\{(t_i, t_i \cdot x_i)\}_i \subset C \times D$, y por lo tanto podemos considerar una subred convergente, $\{(t_{i_j}, t_i \cdot x_{i_j})\}_j$. Por la hipótesis del lema, la red $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$ tiene una subred convergente, es inmediato que su límite está en W. Hemos probado que toda red de W tiene una subred convergente, y por lo tanto W es compacto. □

Lema 2.1.8. *Si la acción parcial de G en X (ambos HLC) es propia, entonces el espacio de órbitas es HLC.*

Demostración. Como X es localmente compacto, X/G también lo es. En cambio, si el espacio de órbitas no es de Hausdorff, hay una red en él que converge a dos puntos distintos, digamos $Gx_i \to Gx$ y $Gx_i \to Gy$ con $Gx \neq Gy$. Usando 2.1.4 (tomando subredes) podemos suponer que existen redes $\{s_i\}_i, \{t_i\}_i \subset G$ tales que para todo i: $x_i \in X_{t_i^{-1}} \cap X_{s_i^{-1}}$ y $t_i \cdot x_i \to x$, $s_i \cdot x_i \to y$. Si $z_i := t_i \cdot x_i$, entonces $z_i \in t_i \cdot (X_{t_i^{-1}} \cap X_{s_i^{-1}}) = X_{t_i} \cap X_{t_i s_i^{-1}}$ y $s_i t_i^{-1} \cdot z_i = s_i \cdot x_i$. Luego $z_i \to x$ y $s_i t_i^{-1} \cdot z_i \to y$.

Por 2.1.7 existen una subred $\{(t_{i_j} s_{i_j}^{-1}, z_{i_j})\}_j$ y $(r,z) \in \Gamma$ tales que $(t_{i_j} s_{i_j}^{-1}, z_{i_j}) \to (r, z)$. Como X es de Hausdorff tiene que ser $z = x$ e $y = \lim_j s_{i_j} t_{i_j}^{-1} \cdot z_{i_j} = r \cdot x$. En definitiva $Gx = Gy$, que es absurdo. □

Resumimos varias propiedades que hemos probado.

Corolario 2.1.9. *Si G actúa parcialmente en X (ambos HLC) y la acción es propia, entonces se cumple que:*

1. *El espacio de órbitas es HLC y el mapa de órbitas $x \mapsto Gx$ es abierto.*
2. *Dado un compacto $T \subset X/G$ existe un compacto $D \subset X$ tal que $GD = T$.*
3. *Dada una red en el espacio de órbitas, $\{Gx_i\}_i$, convergente a Gy, existen una subred $\{x_{i_j}\}_j$ y una red $\{t_j\}_j \subset G$ tales que $x_{i_j} \in X_{t_j^{-1}}$ $\forall\, j$ y $\lim_j t_j \cdot x_{i_j} = y$.*

Proposición 2.1.10. *Una acción parcial (de un grupo HLC en un espacio HLC) es propia si y solamente si tiene acción envolvente propia en un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Primero veamos que si la acción parcial es propia, entonces su gráfico es cerrado y por lo tanto tiene acción envolvente en un espacio de Hausdorff. En efecto, si $(t_i, x_i, t_i \cdot x_i) \to (t, x, y) \in G \times X \times X$, entonces $(x_i, t_i \cdot x_i) \to (x, y)$. Por 2.1.7 existen una subred $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$ y un $(s, z) \in \Gamma$ tales que $(t_{i_j}, x_{i_j}) \to (s, z)$; pero tiene que ser $(s, z) = (t, x)$ por ser G y X de Hausdorff. Además, por la continuidad de la acción, $y = \text{lím}_j\, t_{i_j} \cdot x_{i_j} = t \cdot x$ y, por lo tanto, (t, x, y) está en el gráfico de la acción.

Ahora usemos 2.1.7 para probar que la acción envolvente es propia, supongamos que X^e es el espacio envolvente y $G \times X^e \to X^e \mid (t, z) \mapsto t : z$ es la acción envolvente. Tomemos dos redes $\{w_i\}_i \subset X^e$, $\{t_i\}_i \subset G$ tales que $(w_i, t_i : w_i) \to (w, v) \in X^e \times X^e$. Sabemos que existen $r, s \in G$ tales que $t : w, s : v \in X$. Como X es abierto, si consideramos la red a partir de cierto i_0 podemos suponer que $\{(t : w_i, st_it^{-1} : t : w_i)\}_i \subset X \times X$. Pero en ese caso $t : w_i \in X \cap (t(st_i)^{-1}) : X = X_{t(st_i)^{-1}}$, y por lo tanto $st_it^{-1} : t : w_i = st_it^{-1} \cdot (t : w_i)$, y además $t : w_i \to t : w$ y $st_it^{-1} \cdot (t : w_i) \to s : v$. Como la acción parcial es propia existe una subred convergente, $\{st_{i_j}t^{-1}\}_j$, esto implica que $\{t_{i_j}\}_j$ tiene límite, lo que es suficiente.

Para el recíproco tomamos una red $\{(t_i, x_i)\}_i \subset \Gamma$ tal que $(x_i, t_i \cdot x_i) \to (x, y) \in X \times X$, como $t_i \cdot x_i = t_i : x_i$ y la acción envolvente es propia, existen una subred $\{t_{i_j}\}_j$ y un $t \in G$ tales que $t_{i_j} \to t$. Por continuidad, $t : x = \text{lím}_j\, t_{i_j} : x_{i_j} = y$, luego $x \in X \cap t^{-1} : X = X_{t^{-1}}$. Por lo tanto, $(t_{i_j}, x_{i_j}) \to (t, x) \in \Gamma$. □

Acciones parciales libres

Definición 2.1.11. La acción parcial de G en X es *libre* si dados $t \in G$ y $x \in X$ tales que $x \in X_{t^{-1}}$ y $t \cdot x = x$, se tiene que $t = e$.

Observación 2.1.12. Si la acción parcial es libre, entonces su acción envolvente también lo es (aunque no sea en un espacio de Hausdorff), puesto que si $G \times X^e \to X^e \mid (t, x) \mapsto t : x$ es la acción envolvente y $t : x = x$, tomamos $s \in G$ tal que $s : x \in X$. Luego $(sts^{-1}) : (s : x) = s : x$, por lo tanto $s : x \in X_{st^{-1}s^{-1}}$ y $(sts^{-1}) \cdot (s : x) = s : x$. Como la acción parcial es libre $sts^{-1} = e$, luego $t = e$.

El recíproco de lo anterior es inmediato. Resumimos esto en el siguiente resultado.

Proposición 2.1.13. *Una acción parcial es libre si y solamente si lo es su acción envolvente (incluso en el caso no Hausdorff). Además, una acción parcial de un grupo HLC en un espacio HLC es propia y libre si y solamente si tiene acción envolvente en un espacio de Hausdorff, la cual es propia y libre.*

Adicionalmente tenemos un resultado para acciones globales propias y libres.

Lema 2.1.14. *([12] Lema 3.57) Sean X un espacio topológico HLC y H un grupo topológico HLC que actúa libre y propiamente en X (por una acción global). Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

a) *Dado un compacto $C \subset X$, existe una función $f \in C_c(X)^+$ tal que $\int_H f(t^{-1} \cdot x) d\mu_H(x) = 1$ $\forall\, x \in C$.*

b) *Dados una función $f \in C_c(X)^+$ y un $\varepsilon > 0$ existe, una función $g \in C_c(X)^+$ tal que $sop(g) \subset sop(f)$ y*

$$\left| f(x) - g(x) \int_H g(t^{-1} \cdot x) d\mu(t) \right| < \varepsilon \ \forall\, x \in X.$$

Acciones continuas en ∞

Supongamos que tenemos una acción global del grupo G en el espacio X, que no es compacto. Queremos definir una acción en la compactificación por un punto de X, $\widetilde{X}$, de manera que coincida con la que ya tenemos en X. Para esto no hay mayores inconvenientes.

Proposición 2.1.15. *Supongamos que G actúa en el espacio no compacto X (ambos HLC) mediante la acción $\cdot$. Entonces existe una única acción continua de G en $\widetilde{X}$, de manera que su restricción a X coincide con la acción de G en X.*

La prueba de esto será inmediata a partir de 2.1.17. Si intentamos probar el resultado anterior, observamos que la propiedad que asegura que podemos extender la acción a ∞, de manera continua, es la siguiente.

Definición 2.1.16. La acción parcial $\cdot$, de G en X, es *continua en ∞* si no existe una red $\{(t_i, x_i)\}_i \subset \Gamma$ convergente en $G \times X$, tal que $t_i \cdot x_i \to \infty$ (decimos que una red converge a ∞ si dado cualquier compacto existe un índice a partir del cual la red está fuera de él).

Parece no haber una forma canónica de extender una acción parcial a la compactificación por un punto. Lo que nos aseguramos con la condición de la definición es que si podemos extender la acción a ∞, entonces la extensión será continua.

Otra forma de ver la definición es que no se puede "alcanzar" ∞ desde compactos, en el siguiente sentido.

Afirmación 2.1.17. *La acción parcial $\cdot$, de G en X (ambos HLC), es continua en ∞ si y solamente si dados dos compactos $C \subset X$ y $D \subset G$, se cumple que el conjunto $A_{C,D} := \cup\{t \cdot (C \cap X_{t^{-1}}) : \ t \in D\}$ tiene clausura compacta.*

Demostración. Veamos el recíproco, supongamos que la acción parcial no es continua en ∞. En ese caso existe una red $\{(t_i, x_i)\}_i \subset \Gamma$ que converge a $(t, x) \in G \times X$ y $t_i \cdot x_i \to \infty$. Tomemos C, D entornos compactos de x y t respectivamente. A partir de cierto i_0 tenemos que $t_i \cdot x_i \in A_{C,D}$, y por lo tanto $A_{C,D}$ no es pre-compacto.

Para ver el directo, supongamos que tenemos C, D compactos tales que $\overline{A_{C,D}}$ no es compacto. Entonces, dado un compacto $K \subset X$, se tiene que $K^c \cap \overline{A_{C,D}} \neq \emptyset$. Como K^c, es abierto existe $(t_K, x_K) \in \Gamma \cap (D \times C)$ tal que $t_K \cdot x_K \in K^c$. Ordenamos los compactos de X de forma creciente:

$K' \leqslant K$ sii $K' \subset K$, para obtener una red $\{(t_K, x_K)\}_K$. Como $\{t_K\}_K \subset D$ y $\{x_K\}_K \subset C$, podemos tomar una subred tal que $(t_{K_j}, x_{K_j}) \to (t, x)$; pero, por construcción, $t_{K_j} \cdot x_{K_j} \to \infty$, y por lo tanto la acción parcial no es continua en ∞. $\square$

Cerramos esta sección con dos afirmaciones que permiten verificar si una acción parcial es continua en ∞ y/o propia.

Afirmación 2.1.18. *Si G es un grupo que actúa parcialmente en el espacio X (ambos HLC), entonces el dominio de la acción es cerrado si y solamente si la acción es continua en ∞ y su gráfico es cerrado. Además, ambas condiciones implican que todos los dominios X_t son cerrados. Por otra parte, si el grupo es discreto, entonces las tres condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *La acción es continua en ∞ y su gráfico es cerrado.*
2. *Todos los dominios X_t son abiertos y cerrados.*
3. *El dominio de la acción parcial es cerrado.*

Demostración. Veamos el directo. Claramente, que el dominio sea cerrado implica que la acción parcial satisface la definición de continuidad en ∞. Ahora veamos que el gráfico de la acción parcial es cerrado. Si $(t_i, x_i, t_i \cdot x_i) \to (t, x, y)$ con $(t_i, x_i) \in \Gamma \ \forall\ i$, entonces $(t, x) \in \overline{\Gamma} = \Gamma$ y por continuidad $y = \lim_i t_i \cdot x_i = t \cdot x$.

Con respecto al recíproco, tomemos una red incluida en Γ, $\{(t_i, x_i)\}_i$, que converge a $(t, x) \in G \times X$. La continuidad en ∞ asegura que existe una subred, $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$, de manera que $\{t_{i_j} \cdot x_{i_j}\}_j$ converge a cierto $y \in X$. Entonces $\{(t_{i_j}, x_{i_j}, t_{i_j} \cdot x_{i_j})\}_j$ converge a (t, x, y) y está contenida en el gráfico de la acción parcial. Como el gráfico es cerrado, tiene que ser $(t, x) \in \Gamma$.

Para ver que los dominios son cerrados, tomamos $x \notin X_t$, es decir que $(t^{-1}, x) \notin \Gamma$. Como Γ^c es abierto existe un entorno de x, llamado V, tal que $\{t^{-1}\} \times V \subset \Gamma^c$. Luego $x \in V \subset X_t^c$ y X_t^c es un entorno de todos sus puntos.

En cuanto a la última parte, solo hay que probar que *2.* implica *3.* Veamos que Γ^c es abierto. Para eso basta con observar que si $(t, x) \notin \Gamma$, entonces $\{t\} \times (X_{t^{-1}})^c$ es un entorno de (t, x) contenido en Γ^c. $\square$

Corolario 2.1.19. *Dada una acción parcial de un grupo HLC en un espacio HLC, son equivalentes:*

1. *La acción parcial es propia y continua en ∞.*
2. *La acción parcial es propia y su dominio es cerrado.*
3. *La acción parcial tiene dominio cerrado y acción envolvente propia en un espacio de Hausdorff.*

Por último, una caracterización para grupos compactos.

Afirmación 2.1.20. *Si G es un grupo compacto que actúa parcialmente en X (ambos HLC), entonces la acción es propia y continua en ∞ si y solamente si el dominio de la acción es cerrado.*

Demostración. Para probar el directo, recordamos que toda acción parcial continua en ∞ con gráfico cerrado tiene dominio cerrado, y que toda acción propia tiene gráfico cerrado.

Con respecto al recíproco, definimos $f : \Gamma \to X \times X$ tal que $(t, x) \mapsto (x, t \cdot x)$. Si $C \subset X \times X$ es un compacto (no vacío) tomamos una red $\{(t_i, x_i)\}_{i\in I} \subset f^{-1}(C)$. Como C y G son compactos, existe una subred, $\{(t_{i_j}, x_{i_j})\}_j$, convergente a un $(t, x) \in G \times X$. Por otra parte C es cerrado por ser compacto y $X \times X$ de Hausdorff, por lo tanto $f^{-1}(C)$ es cerrado en Γ y por lo tanto cerrado en $G \times X$. Esto implica que $(t_{i_j}, x_{i_j}) \to (t, x) \in f^{-1}(C)$. Entonces la acción parcial es propia. $\square$

Acciones que conmutan

En lo que sigue trabajaremos con un espacio X (HLC) y con dos acciones parciales en X, una del grupo H y otra del grupo K (ambos HLC). Adoptaremos la siguiente convención para notar las acciones, los dominios serán $\Gamma_H := \{(t, x) \in H \times X : \ x \in X^H_{t^{-1}}\}$, análogamente definimos Γ_K. Las acciones serán $\Gamma_H \to X \mid (t, x) \mapsto t \cdot x$ y $\Gamma_K \to X \mid (s, x) \mapsto s : x$.

Definición 2.1.21. Las acciones parciales, de los grupos H y K en X, *conmutan* si: $t \cdot (X^H_{t^{-1}} \cap X^K_s) = s : (X^K_{s^{-1}} \cap X^H_t)$ y $s : t\cdot x = t\cdot s : x$ para cualesquiera $t \in H,\ s \in K$ y $x \in t^{-1}\cdot(X^H_t \cap X^K_{s^{-1}})$.

Observación 2.1.22. Los abiertos X^H_t son invariantes por la acción de K pues $s : (X^K_{s^{-1}} \cap X^H_t) = t \cdot (X^H_{t^{-1}} \cap X^K_s) \subset X^H_t$.

La definición expresa que cuando podemos actuar por t y luego por s, entonces lo podemos hacer en el otro sentido y de ambas formas se tiene el mismo resultado.

Proposición 2.1.23. *Sean X un espacio y H, K grupos (todos HLC) que actúan parcialmente en X, con acciones que conmutan, y tales que X/H es de Hausdorff. En ese caso existe una acción parcial continua de K en X/H, de manera que si $s \in K$ entonces $(X/H)_s = HX^K_s$ (la imagen por el mapa cociente de X^K_s) y $s : (Hx) = H(s : x)$.*

Demostración. Comencemos por observar que si $(X/H)_s := HX^K_s$ para cada $s \in K$, entonces $(X/H)_s$ es abierto pues la proyección en el cociente es abierta y X^K_s es abierto en X. Ahora veamos que $\Gamma(X/H, K) := \{(s, z) \in K \times X/H : \ z \in (X/H)_s\}$ es abierto en $K \times X/H$. Para eso consideramos la función $F : K \times X \to K \times X/H$ $(s, x) \mapsto (s, Hx)$, que claramente es continua. Además lleva abiertos de la base de la topología producto en abiertos, y por lo tanto es abierta. Por lo tanto $F(\Gamma_K) = \Gamma(X/H, K)$ es abierto.

Para ver que la acción parcial es continua consideramos $G : \Gamma_K \to X/H$ tal que $G(s, x) = H(s : x)$, claramente es continua. En Γ_K definimos la relación de equivalencia $(s, x) \sim (r, y)$ sii $r = s$ y $Hx = Hy$. Veamos que G es constante en las clases de $\sim$. Supongamos que $(s, x) \sim (r, y)$, de modo que $s = r$ y existe $t \in H$ tal que $x \in X^H_{t^{-1}}$ y $t \cdot x = y$. Pero $x \in t^{-1} \cdot (X^H_t \cap X^K_{s^{-1}}) = s^{-1} : (X^K_s \cap X^H_{t^{-1}}) \ \Rightarrow\ s : x \in X^H_{t^{-1}},\ r : y = s : t \cdot x = t \cdot s : x$, y por lo tanto $H(s : x) = H(r : y)$.

Tomando la topología cociente en $\Gamma_K/\sim$ tenemos una función continua $\widetilde{G}:\Gamma_K/\sim\to X/H$ dada por: $[s,x]\mapsto Hs:x$. Ahora veamos que $\Gamma_K/\sim$ es homeomorfo a $\Gamma(X/H,K)$. Sea $f:\Gamma_K\to\Gamma(X/H,K)$ la restricción de F. Sabemos que f es sobreyectiva, continua y además abierta; también es constante en las clases de $\sim$ pues $(s,x)\sim(r,y)$ sii $s=r$ y $Hx=Hy$ sii $f(s,x)=(s,Hx)=(r,Hy)=f(r,y)$. Por lo tanto tenemos un homeomorfismo $\widetilde{f}:\Gamma_K/\sim\to\Gamma(X/H,K)$ $\widetilde{f}([s,x])=(s,Hx)$. La acción parcial que queremos definir es $\widetilde{G}\circ\widetilde{f}^{-1}:\Gamma(X/H,K)\to X/H$ $(s,Hx)\mapsto Hs:x$, que por lo que hemos visto es continua.

Con lo que hemos probado es inmediato que el mapa $(X/H)_{s^{-1}}\to(X/H)_s\mid Hx\mapsto Hs:x$ es un homeomorfismo con inversa $(X/H)_s\to(X/H)_{s^{-1}}\mid Hx\mapsto Hs^{-1}:x$. Por otra parte tenemos que $H(X_s^K\cap X_r^K)=HX_s^K\cap HX_r^K$ para cualesquiera $r,s\in K$. En efecto, $\subset$ es inmediata. Para ver la otra inclusión nótese que si $z=Hx=Hy$ para $x\in X_s^K,\ y\in X_r^K$, entonces x e y están en la misma $H-$órbita, y como X_s^K y X_r^K son $H-$invariantes: $x,y\in X_s^K\cap X_r^K$, que implica lo que queremos. Esto nos permite probar que:

$$\begin{aligned}s:((X/H)_{s^{-1}}\cap(X/H)_r)&=s:(HX_{s^{-1}}^K\cap HX_r^K)=s:(H(X_{s^{-1}}^K\cap X_r^K))=H(s:(X_{s^{-1}}^K\cap X_r^K))\\&=H(X_s^K\cap X_{sr}^K)=HX_s^K\cap HX_{sr}^K=(X/H)_s\cap(X/H)_{sr}.\end{aligned}$$

Finalmente, tomemos $s,r\in K$ y veamos que la función $(X/H)_{s^{-1}}\cap(X/H)_{s^{-1}r^{-1}}\to(X/H)_s\cap(X/H)_{sr}$ $Hx\mapsto r:(s:(Hx))$ coincide con la función $Hx\mapsto rs:(Hx)$, pero $r:(s:(Hx))=r:H(s:x)=Hr:(s:x)=H(rs:x)=rs:Hx$. $\square$

Acción del grupo producto

Si tenemos dos acciones globales en un espacio X, de los grupos H y K, podemos definir en X una acción de $G:=H\times K$ en X mediante $(t,s)x:=t\cdot s:x$. Necesitamos la conmutatividad de las acciones para probar la propiedad $(t,s)((t',s')x)=(tt',ss')x$. Esto ocurre también con las acciones parciales.

Proposición 2.1.24. *Supongamos que X es un espacio topológico, tenemos dos grupos topológicos H y K (todos HLC) que actúan parcialmente en X y sus acciones conmutan. En esta situación existe una acción parcial de $G:=H\times K$ en X de manera que: $X_{(t,s)}^G=t\cdot(X_{t^{-1}}^H\cap X_s^K)=s:(X_{s^{-1}}^K\cap X_t^H)$ y $(t,s)x=t\cdot s:x$, para cualesquiera $x\in X_{(t,s)^{-1}}^G$ y $(t,s)\in H\times K$.*

Demostración. Probemos que $\Gamma_G=\{(t,s,x)\in H\times K\times X:\ x\in t^{-1}\cdot(X_t^H\cap X_{s^{-1}}^K)\}$ es abierto en $H\times K\times X$. Definamos dos funciones (continuas):

$$\pi_H:G\times X\to H\times X\mid(t,s,x)\mapsto(t,x)\ \text{ y }\ \pi_K:G\times X\to K\times X\mid(t,s,x)\mapsto(s,x).$$

Como las operaciones de grupo son continuas, el conjunto $\Gamma_K^{-1}:=\{(s,x)\in K\times X\ :\ x\in X_s^K\}$ es abierto en $K\times X$. Por otra parte definamos la función (continua)

$$F:\pi_K^{-1}(\Gamma_K)\to\pi_K^{-1}(\Gamma_K^{-1})\mid(t,s,x)\mapsto(t,s,s:x).$$

El conjunto $D := F^{-1}(\pi_K^{-1}(\Gamma_K^{-1}) \cap \pi_H^{-1}(\Gamma_H))$ es un abierto relativo de $\pi_K^{-1}(\Gamma_K)$, que es abierto en $G \times X$, y por lo tanto D es abierto en $G \times K$. Lo que queremos ver es que $D = \Gamma_G$. En efecto:

$$\begin{aligned}(t,s,x) \in D \;\Leftrightarrow\; (t,s,s:x) \in \Gamma_K^{-1}) \cap \pi_H^{-1}(\Gamma_H) \;\Leftrightarrow\; s:x \in X_s^K \cap X_t^H \Leftrightarrow x \in s^{-1} : (X_s^K \cap X_s^H) \\ \Leftrightarrow (t,s,x) \in \Gamma_G\end{aligned}$$

La continuidad de la función $\Gamma_G \to X$ tal que $(t,s,x) \mapsto t \cdot s : x$ se deduce inmediatamente de la continuidad de las acciones de H y K. Finalmente, basta con probar que dados $(t,s),(r,k) \in G$ y un $x \in X_{(t,s)}^G$ tal que $(t,s)x \in X_{(r,k)}^G$, entonces $(rt,ks)x = (r,k)(t,s)x$; en efecto:

$$(r,k)(t,s)x = r \cdot k : t \cdot s : x = k : r \cdot t \cdot s : x = k : rt \cdot s : x = rt \cdot k : s : x = rt \cdot ks : x = (rt,ks)x.$$

La primera igualdad es simplemente la definición, la segunda y la cuarta se deben a la conmutatividad de las acciones parciales. La tercera igualdad es porque la función $y \mapsto rt \cdot y$ es una extensión de $y \mapsto r \cdot t \cdot y$, y la quinta igualdad se justifica de manera análoga.

□

Lema 2.1.25. *Supongamos que H y K son grupos que actúan parcialmente en el espacio X (todos HLC). Si las acciones conmutan, y tienen acción envolvente, y una de ellas es continua en ∞, entonces la acción parcial del grupo $H \times K$, tal como se define en 2.1.24, tiene acción envolvente en un espacio HLC.*

Demostración. Podemos suponer que la acción de K es continua en ∞. Veremos que el gráfico de la acción producto es cerrado. Tomemos una red en dicho gráfico $\{(t_i, s_i, x_i, y_i)\}_i$, que converge a $(t,s,x,y) \in H \times K \times X \times X$. Como consecuencia, $x_i \in X_{s_i^{-1}}^K$ para todo i. Además, la red $s_i : x_i$ no puede tender a ∞ porque $s_i \to s$ y $x_i \to x$. Por lo tanto, existen una subred, $\{(s_{i_j}, x_{i_j})\}_j$, y un compacto en X que contiene a la red $\{s_{i_j} : x_{i_j}\}_j$; tomando una subred podemos suponer que $\{s_{i_j} : x_{i_j}\}_j$ converge a cierto $z \in X$. Por lo tanto, $\{(s_{i_j}, x_{i_j}, s_{i_j} : x_{i_j})\}_j$ es una red en el gráfico de la acción de K que converge a (s,x,z); como el gráfico es cerrado tiene que ser $x \in X_{s^{-1}}^K$. Por la continuidad tenemos que $s_i : x_i \to s : x = z$.

Por otra parte, $\{(t_i, s_i : x_i, t_i \cdot s_i : x_i)\}_i$ es una red en el gráfico de la acción de H y converge a (t,z,y); como consecuencia $s : x = z \in X_{t^{-1}}^H$, e $y = t \cdot z = t \cdot s : x$. Pero $x = s^{-1} : z \in s^{-1} : (X_s^K \cap X_{t^{-1}}^H) = X_{(t,s)}^G$ y $(t,s)x = t \cdot s : x = y$. □

Corolario 2.1.26. *Supongamos que dos grupos HLC actúan parcialmente en un espacio HLC, y que las acciones conmutan, son propias y una de ellas es continua en ∞. Entonces la acción parcial del grupo producto tiene acción envolvente en un espacio HLC.*

Demostración. Esto es inmediato a partir del Lema anterior y de 2.1.10. □

2.2. Fibrados de C^*-álgebras

Supongamos que tenemos una C^*-álgebra A y un espacio topológico HLC X. Con ellos podemos formar un fibrado de Banach (1.1.2) $\mathfrak{B} = (A \times X, X, \pi)$ donde $\pi : A \times X \to X$ está dada por $(a, x) \mapsto x$. A los fibrados construidos de esta manera los llamaremos fibrados triviales. Observamos que además cada fibra tiene estructura de C^*-álgebra.

La siguiente definición se encuentra en [6].

Definición 2.2.1. Un *fibrado de C^*-álgebras* es un fibrado de Banach $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$ con espacio de base HLC, junto con dos funciones continuas:

$$\{(a, b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \pi(a) = \pi(b)\} \to \mathcal{B} \mid (a, b) \mapsto ab, \quad \mathcal{B} \to \mathcal{B} \mid a \mapsto a^*,$$

llamadas multiplicación e involución respectivamente, de manera que se satisfacen las propiedades:

1. $\pi(ab) = \pi(a)$ siempre que $\pi(a) = \pi(b)$, $a, b \in \mathcal{B}$.
2. $\pi(a^*) = \pi(a)$ para todo $a \in \mathcal{B}$.
3. Cada fibra es una C^*-álgebra con la estructura de espacio vectorial que tiene como fibrado de Banach, con la operación multiplicación como producto y la involución como adjunción.

Observación 2.2.2. Cada abierto del espacio de base da lugar a un nuevo fibrado: si $U \subset X$ es un abierto (no vacío) consideramos U y $\mathcal{B}_U := \pi^{-1}(U)$ con la topología relativa. Si $\pi_U : \mathcal{B}_U \to U$ es la restricción de π, restringiendo las operaciones a cada fibra de $\mathcal{B}_U$ tenemos un fibrado $\mathfrak{B}_U := (\mathcal{B}_U, U, \pi_U)$.

Definición 2.2.3. Si $(\mathcal{B}, X, \pi)$ y $(\mathcal{D}, Y, \phi)$ son fibrados de C^*-álgebras, un *morfismo* $(f, g) : (\mathcal{B}, X, \pi) \to (\mathcal{D}, Y, \phi)$ consta de dos funciones continuas: $f : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ y $g : X \to Y$, tales que $\phi \circ f = g \circ \pi$ y la restricción de f a cada fibra es un morfismo de C^*-álgebras.

Los isomorfismos quedan caracterizados como los morfismos (f, g) de manera que f y g son biyectivas, y (f^{-1}, g^{-1}) es un morfismo. Dos fibrados son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos.

Un ejemplo inmediato de morfismo es la inclusión $(\iota_U, \iota_{\mathcal{B}_U})$, donde $\iota_U : U \to X$ y $\iota_{\mathcal{B}_U} : \mathcal{B}_U \to \mathcal{B}$ son las inclusiones.

Es inmediato que todo fibrado trivial es un fibrado de C^*-álgebras. Supongamos además que tenemos un grupo topológico HLC G y acciones continuas de G en A y en X. A la primera la llamaremos α y a la segunda la denotaremos con $\cdot$. Con ellas podemos construir una acción en el fibrado trivial:

$$\nu : G \times \mathcal{B} \to \mathcal{B} \qquad (t, (a, x)) \mapsto (\alpha_t(a), t \cdot x).$$

Claramente esta función es continua y lleva fibras en fibras como isomorfismo de C^*-álgebras. Además tiene la propiedad $\pi(\nu_t(a, x)) = t \cdot \pi(a, x)$, es decir que π es "equivariante" para ν y $\cdot$. Podemos olvidarnos de α y considerar solamente ν y $\cdot$.

Definición 2.2.4. Una acción parcial, α, del grupo topológico HLC G en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$, consta de dos acciones parciales de G, una en X y otra en $\mathcal{B}$:

$$\Gamma_X = \{(t,x) \in G \times X : \ x \in X_{t^{-1}}\} \to X \mid (t,x) \mapsto t \cdot x,$$

$$\Gamma_{\mathcal{B}} := \{(t,b) \in G \times \mathcal{B} : \ b \in \mathcal{B}_{t^{-1}}\} \to \mathcal{B} \mid (t,b) \mapsto \alpha_t(b).$$

De manera que se cumple que:

1. Ambas acciones son continuas (Definición 0.0.2).
2. $\mathcal{B}_t = \pi^{-1}(X_t) \ \forall \ t \in G$.
3. $\pi(\alpha_t(b)) = t \cdot \pi(b) \ \forall \ (t,b) \in \Gamma_{\mathcal{B}}$.
4. Si $x \in X_{t^{-1}}$ entonces α_t restringido a $\mathcal{B}_x$ es un morfismo de C^*-álgebras.

Decimos que la acción es global si lo es la acción en el espacio de base; en tal caso la acción en $\mathcal{B}$ es global.

Notación 2.2.5. En la definición anterior hemos escrito $\mathcal{B}_t$ para $t \in G$; esto no es la fibra sobre t sino el dominio de $\alpha_{t^{-1}}$. Continuamos denotando $\mathcal{B}_x$ a la fibra sobre $x \in X$; podemos determinar si se trata de una u otra situación observando si el subíndice es un elemento del grupo o del espacio de base. Hacemos esto para no cargar excesivamente la notación.

La pregunta inmediata que surge es qué significa acción envolvente en este caso.

Definición 2.2.6. Sea α una acción parcial de G en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$. Una *acción envolvente* de α es una cuaterna $(\alpha, \mathfrak{B}^e, \iota_{\mathcal{B}}, \iota_X)$ que consta de: un fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B}^e = (\mathcal{B}^e, X^e, \pi^e)$, una acción global de G en $\mathfrak{B}^e$ llamada α, y dos funciones $\iota_X : X \to X^e$ e $\iota_{\mathcal{B}^e} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^e$, tales que (X^e, ι_X) y $(\mathcal{B}^e, \iota_{\mathcal{B}})$ son los espacios envolventes de X y $\mathcal{B}$ respectivamente y $(\iota_{\mathcal{B}}, \iota_X)$ es un morfismo.

La definición implica que $(\pi^e)^{-1}(\iota_X(X)) = \iota_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$. En efecto, la inclusión $\supset$ es inmediata a partir de la definición. Por otro lado, si $y = \iota_X(x)$, entonces $\iota_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_x)$ es un subespacio de $\mathcal{B}^e_y$ que contiene a un entorno abierto de 0_y (porque $\iota_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$ es abierto en $\mathcal{B}^e$), y por lo tanto $\iota_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_x) = \mathcal{B}^e_y$.

En definitiva el fibrado $\mathfrak{B}$ es isomorfo a $\mathfrak{B}^e_{\iota_X(X)}$ y eso determina de manera única las operaciones de fibrado en $\mathcal{B}_{\iota_X(X)}$. Como además la órbita de $\iota_X(X)$ es X^e y la acción de G en las fibras es por isomorfismos, la estructura de fibrado de C^*-álgebras de $\mathcal{B}^e$ queda únicamente determinada por la de $\mathcal{B}$ y la acción.

Consideraciones similares a estas y los resultados encontrados en [1] permiten probar que la envolvente es única a menos de isomorfismos.

Teorema 2.2.7. *Sea α una acción parcial de G en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$, tal que la acción parcial del espacio de base tiene acción envolvente en un espacio de Hausdorff (equivalentemente, su gráfico es cerrado). En ese caso α tiene acción envolvente.*

Demostración. Primero construimos los espacios envolventes de las dos acciones de G, para luego equiparlos con la única estructura de fibrado de C^*-álgebras posible (ver las consideraciones previas al enunciado).

Tomaremos una forma concreta de los espacios y acciones envolventes, la de 1.4.3. Para ver que $\mathcal{B}^e$ es de Hausdorff necesitamos comprobar que el gráfico de la acción en $\mathcal{B}$ es cerrado. Tomemos una red en el gráfico convergente a un punto de $G\times\mathcal{B}\times\mathcal{B}$, $(t_i, b_i, \alpha_{t_i}(b_i)) \to (t,b,c)$. En ese caso $\pi(b_i) \to \pi(b)$ y $t_i \cdot \pi(b_i) = \pi(\alpha_{t_i}(b_i)) \to \pi(c)$. Por lo tanto $(t_i, \pi(b_i), t_i \cdot \pi(b_i)) \to (t, \pi(b), \pi(c))$. Como el gráfico de la acción en el espacio de base es cerrado, tenemos que $\pi(b) \in X_{t^{-1}}$, y por lo tanto $b \in \pi^{-1}(X_{t^{-1}}) = \mathcal{B}_{t^{-1}}$. Por continuidad $\alpha_t(b) = \lim_i \alpha_{t_i}(b_i) = c$.

Mantenemos la notación de 1.4.3, $\iota_X : X \to X^e \mid x \mapsto [e,x]$ e $\iota_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^e \mid b \mapsto [e,b]$. Por otra parte definimos $F : G\times\mathcal{B}^e \to X^e$ como $F(t,b) := [t,\pi(b)]$. Es claro que F es continua y sobreyectiva, y también que es constante en las clases. Llamemos π^e a la función que define F en el cociente $\mathcal{B}^e$, es decir, la única tal que $\pi([t,b]) = [t,\pi(b)]$. Claramente es continua y sobreyectiva. No es inmediato probar que F es abierta, pero en última instancia se reduce a probar que la saturación de un abierto, en $G\times X$, es abierto; lo que a su vez sigue de que las operaciones de grupo en G son continuas y la continuidad de la acción parcial en X. Las igualdades $\pi^e \circ \iota_{\mathcal{B}} = \iota_X \circ \pi$ y $\pi^e \circ \alpha^e_t = t \cdot \pi^e \ \forall\ t \in G$ se deducen fácilmente a partir de las fórmulas de las funciones.

Nos resta dar a $\mathcal{B}^e$ estructura de fibrado de C^*-álgebras sobre el espacio de base X^e; como ya vimos, hay una única manera de hacerlo. Más aún, si podemos definir una suma, norma, involución, etc, en $\mathcal{B}^e$ de manera que estas se "preserven" por α^e, ι_X e $\iota_{\mathcal{B}}$, entonces automáticamente esas operaciones serán continuas. En efecto, la continuidad se prueba localmente: se traslada todo a $\iota_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$ con un α^e_t (t fijo), luego se lleva a $\mathcal{B}$ mediante $\iota_{\mathcal{B}}^{-1}$, allí se cambia la operación deseada por la correspondiente en $\mathcal{B}$ y, finalmente, se aplican $\iota_{\mathcal{B}}$ y $\alpha_{t^{-1}}$ nuevamente. De esta forma se expresa, localmente, cada operación de $\mathcal{B}^e$ como una composición de $\iota_{\mathcal{B}}$, α_t, sus inversas y la respectiva operación de $\mathcal{B}$, todas estas continuas.

Quizás la propiedad más delicada a probar acerca de $\mathcal{B}^e$ es la siguiente: dada una red $\{z_i\}_i \subset \mathcal{B}^e$ tal que $\{\pi^e(z_i)\}_i$ converge a cierto $[t,x] \in X^e$ y $\|z_i\| \to 0$, entonces $z_i \to 0_{[t,x]}$ en $\mathcal{B}^e$. Esto no es difícil de probar si trasladamos todo a $\mathcal{B}$. Sea W un entorno de $[t,x]$ tal que $t^{-1}\cdot W \subset \iota_X(X)$, podemos encontrar un i_0 a partir del cual $z_i \in (\pi^e)^{-1}(W)$, y por lo tanto $\alpha^e_{t^{-1}}(z_i) \in \iota_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$. Luego tomando los términos a partir de i_0, $\pi(\iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\alpha^e_{t^{-1}}(z_i))) = \iota_X^{-1}(\pi^e(\alpha^e_{t^{-1}} z_i)) \to \iota_X^{-1}([e,x]) = x$; por otro lado $\|\iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\alpha^e_{t^{-1}}(z_i))\| = \|z_i\| \to 0$, y por lo tanto $\iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\alpha^e_{t^{-1}}(z_i)) \to 0_x$. Luego componiendo con $\alpha^e_t \iota_{\mathcal{B}}$ deducimos que $z_i \to 0_{[t,x]}$.

Para que la prueba no sea excesivamente larga, indicamos cómo definir la suma, trabajamos sin topología porque, como vimos antes, la continuidad se verifica automáticamente por otros medios.

Suma: Sea $Z := \{(t,b,s,c) \in (G\times\mathcal{B})\times(G\times\mathcal{B}) : \pi^e([t,b]) = \pi^e([s,c])\}$. Definimos $G : Z \to \mathcal{B}^e$ de manera que $G(t,b,s,c) = [s, \alpha_{s^{-1}t}(b) + c]$; esto tiene sentido, ya que si $\pi^e[t,b] = \pi^e[s,c]$ eso implica que $\pi(b) \in X_{t^{-1}s}$ y $(s^{-1}t)\cdot\pi(b) = \pi(c)$, de lo que se deduce $b \in \mathcal{B}_{t^{-1}s}$, $\pi(\alpha_{ts^{-1}}(b)) = \pi(c)$.

Por otra parte, consideremos la función $H : Z \to D := \{(u, v) \in \mathcal{B}^e \times \mathcal{B}^e : \ \pi^e(u) = \pi^e(v)\} \subset \mathcal{B}^e \times \mathcal{B}^e$ definida por $H(t, b, s, c) = ([t, b], [s, c])$. Claramente es sobreyectiva. En Z definimos la relación de equivalencia uHv sii $H(u) = H(v)$. Entonces tenemos una biyección $\widetilde{H} : Z/H \to D$, la cual está dada por $\widetilde{H}([t, b, s, c]_H) = ([t, b], [s, c])$.

Lo que queremos ver es que la función G pasa al cociente Z/H como una función $\widetilde{G} : Z/H \to \mathcal{B}^e$; la suma en $\mathcal{B}^e$ será $+ := \widetilde{G} \circ \widetilde{H}^{-1} : D \to \mathcal{B}^e$, $[t, b] + [s, c] := [s, \alpha_{s^{-1}t}(b) + c]$. Primero veamos que $G(t, b, s, c) = G(s, c, t, b)$, decir: $[s, \alpha_{s^{-1}t}(b) + c] = [t, \alpha_{t^{-1}s}(c) + b]$. Pero $\alpha_{s^{-1}t}(b) \in \mathcal{B}_{s^{-1}t}$ y $c \in \mathcal{B}_{s^{-1}t}$ (porque $\pi(c) = s^{-1}t \cdot \pi(b)$). Además $\alpha_{t^{-1}s}(\alpha_{s^{-1}t}(b) + c) = \alpha_e(b) + \alpha_{t^{-1}s}(c)$. Con lo que queda probado. Ahora veamos que si $[t', b'] = [t, b]$ entonces $G(t, b, s, c) = G(t', b', s, c)$. En efecto $G(t, b, s, c) = [s, \alpha_{s^{-1}t}(b) + c]$, $G(t', b', s, c) = [s, \alpha_{s^{-1}t'}(b') + c]$. Pero $\alpha_{t^{-1}t'}(b') = b$ y $\alpha_{s^{-1}t}(b) = \alpha_{s^{-1}t}(\alpha_{t^{-1}t'}(b')) = \alpha_{s^{-1}t'}(b')$.

Veamos entonces que G es constante en las clases de H. Si $H(t, b, s, c) = H(t', b', s', c')$ entonces $[t, b] = [t', b']$, $[s, c] = [s', c']$. Pero

$$G(t, b, s, c) = G(t', b', s, c) = G(s, c, t', b') = G(s', c', t', b') = G(t', b', s', c').$$

Hemos probado que tenemos una función suma $+ : D \to \mathcal{B}^e \mid [t, b] + [s, c] = [s, \alpha_{s^{-1}t}(b) + c]$. Observar que

$$\iota_{\mathcal{B}}(b + c) = [e, b + c] = [e, \alpha_e(b) + c] = [e, b] + [e, c] = \iota_{\mathcal{B}}(b) + \iota_{\mathcal{B}}(c).$$

$$\begin{aligned}\alpha^e_r([t, b] + [s, c]) &= [rs, \alpha_{s^{-1}t}(b) + c] = [rs, \alpha_{s^{-1}t}(b)] + [rs, c] = \alpha^e_r([s, \alpha_{s^{-1}t}(b)]) + \alpha^e_r([s, c]) \\ &= \alpha^e_r([t, b]) + \alpha^e_r([t, c]).\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que si $\pi^e([t, b]) = \pi^e([s, c])$, entonces $[s, \alpha_{s^{-1}t}(b)] = [t, b]$.

□

Corolario 2.2.8. *Una acción parcial en un fibrado de C^*-álgebras tiene una acción envolvente si y solamente si la acción en el espacio de base tiene acción envolvente en un espacio de Hausdorff.*

Acciones que conmutan en fibrados

Definición 2.2.9. Dos acciones parciales en un fibrado de C^*-álgebras *conmutan* si y solamente si las correspondientes acciones en el espacio de base y en el espacio total conmutan.

Como lo hicimos para las acciones en espacios HLC, podemos definir una acción del grupo producto. Debemos observar que esto no es tan fácil como aplicar la proposición 2.1.24 a la acción en el espacio de base y en el espacio de las fibras, ya que este último en general no es localmente compacto. Sin embargo, lo podemos hacer igual.

Proposición 2.2.10. *Sean $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$ un fibrado de C^*-álgebras con dos acciones parciales que conmutan, α y β, de los grupos HLC H y K respectivamente. En esta situación existe una* *acción parcial μ del grupo $G := H \times K$ en el fibrado $\mathfrak{B}$, de manera que $\mathcal{B}^G_{(t,s)} = \alpha_t\left(\mathcal{B}^H_{t^{-1}} \cap \mathcal{B}^K_s\right)$, $X^G_{(t,s)} = t \cdot \left(X^H_{t^{-1}} \cap X^K_s\right)$ y además si $b \in \mathcal{B}^G_{(t,s)^{-1}}$, entonces $\mu_{(t,s)}(b) = \beta_s\alpha_t(b)$. La condición análoga se satisface en el espacio de base.*

Demostración. Si tratamos de copiar la demostración de 2.1.24 observamos que solamente debemos probar dos cosas: que $\mathcal{B}^G_{(t,s)} = \pi^{-1}(X^G_{(t,s)})$ para todo $(t,s) \in G = H \times K$, y que $\Gamma(\mathcal{B}, G) := \{(t,s,x) \in H \times K \times \mathcal{B} : b \in \mathcal{B}^G_{(t,s)^{-1}}\}$ es abierto.

Para probar lo primero observamos que si $t \in H$ y $V \subset X$, entonces

$$\alpha_t(\pi^{-1}(X^H_{t^{-1}} \cap V)) = \pi^{-1}(t \cdot (X^H_{t^{-1}} \cap V)).$$

Una consecuencia de lo anterior es que $\mathcal{B}^G_{(t,s)} = \pi^{-1}(X^G_{(t,s)})$, pues

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^G_{(t,s)} &= \alpha_t\left(\mathcal{B}^H_{t^{-1}} \cap \mathcal{B}^K_s\right) = \alpha_t\left(\pi^{-1}(X^H_{t^{-1}}) \cap \pi^{-1}(X^K_s)\right) = \pi^{-1}(t \cdot (X^H_{t^{-1}} \cap X^K_s)) \\ &= \pi^{-1}(X^G_{(t,s)}).\end{aligned}$$

En cuanto a lo segundo, consideramos la función continua $H \times K \times \mathcal{B} \to H \times K \times X$ tal que $(t,s,b) \mapsto (t,s,\pi(b))$. De acuerdo a lo visto antes la preimagen de $\Gamma(X,G)$ por esta función es $\Gamma(\mathcal{B}, G)$, y por 2.1.24 $\Gamma(X,G)$ es abierto. □

2.3. Álgebras inducidas por acciones parciales

Supongamos que el grupo HLC actúa en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$ mediante una acción parcial llamada α.

Definición 2.3.1. Decimos que una sección continua $f : X \to \mathcal{B}$ *respeta las α-órbitas* si, dados $t \in H$ y $x \in X^H_{t^{-1}}$, se cumple que $\alpha_t(f(x)) = f(t \cdot x)$ (observar que $f(x) \in \mathcal{B}^H_{t^{-1}}$). Es decir que f es un morfismo de acciones parciales.

Si la sección continua f respeta las α-órbitas, entonces la función $x \mapsto \|f(x)\|$ es continua y constante en las órbitas, y por lo tanto define una función continua $f_H : X/H \to \mathbb{R}$ tal que $Hx \mapsto \|f(x)\|$.

Definición 2.3.2. El *álgebra inducida* por α en $\mathfrak{B}$ es

$$Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) := \{f \in C^b(\mathfrak{B}) : \ f \text{ respeta las } \alpha-\text{órbitas, y } Hx \mapsto \|f(x)\| \in C_0(X/H)\}.$$

También definimos

$$Ind^H_c(\mathfrak{B}, \alpha) := \{f \in C^b(\mathfrak{B}) : \ f \text{ respeta las } \alpha-\text{órbitas, y } Hx \mapsto \|f(x)\| \in C_c(X/H)\}.$$

Para esta definición no pedimos que X/H sea Hausdorff, aunque es localmente compacto porque X lo es.

Afirmación 2.3.3. *$Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ es una C^*-subálgebra de $C^b(\mathfrak{B})$. Además, si α es propia, entonces $Ind_c^H(\mathfrak{B},\alpha)$ es denso en $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$.*

Demostración. La única propiedad que no es inmediata de probar es que $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ es cerrado. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}_n \subset Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ converge a $f \in C^b(\mathfrak{B})$ (uniformemente). Si $x \in X^H_{t^{-1}}$ entonces $\alpha_t(f(x)) = \text{lím}_n\, \alpha_t(f_n(x)) = \text{lím}_n\, f_n(t \cdot x) = f(t \cdot x)$. Por lo tanto f respeta las α-órbitas.

Resta ver que $f_H \in C_0(X/H)$. Pero $\text{lím}_n \|f_H - (f_n)_H\| = 0$, luego $f_H \in \overline{C_0(X/H)} = C_0(X/H)$ (la clausura es en $C^b(X/H)$ con la norma del supremo).

Para la segunda afirmación tomamos $f \in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ y un $\varepsilon > 0$. El espacio de órbitas X/H es HLC, por lo tanto existe una función $\psi \in C_c(X/H)$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, y que vale 1 en el compacto $\{Hy \in X/H : \ \|f(y)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}$. Sea $g \in Ind_c^H(\mathfrak{B},\alpha)$ la función definida como $g(x) = \psi(Hx)f(x)$, $\forall\, x \in X$; es fácil ver que $\|f - g\| < \varepsilon$. □

Definición 2.3.4. Dado un abierto del espacio de base $U \subset X$, se define

$$Ind^H(\mathfrak{B},\alpha,U) := \{f \in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha) : \ Hx \mapsto \|f(x)\| \in C_0(HU)\}.$$

Afirmación 2.3.5. *$Ind^H(\mathfrak{B},\alpha,U)$ es un ideal de $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ y si $U, V \subset X$ son abiertos saturados, entonces $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha,U) \cap Ind^H(\mathfrak{B},\alpha,V) = Ind^H(\mathfrak{B},\alpha,U \cap V)$.*

Demostración. De la primera afirmación, lo que no es inmediato es que $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha,U)$ es cerrado, lo cual es cierto pues la norma en $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ es la norma del supremo.

La segunda afirmación es consecuencia de que $C_0(HU) \cap C_0(HV) = C_0(HU \cap HV) = C_0(H(U \cap V))$, por ser U y V saturados. □

Ahora supongamos que tenemos otra acción parcial, β, del grupo HLC K en el fibrado $\mathfrak{B}$ y que las acciones conmutan. Lo que queremos hacer es definir una acción parcial de K en $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$.

Proposición 2.3.6. *Sean α y β acciones parciales que conmutan de los grupos HLC H y K, respectivamente, en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$; y supongamos además que la acción de H es propia. Para cada $s \in K$ se definen $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s := Ind^H(\mathfrak{B},\alpha,X_s^K)$ y $\beta_s : Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s^{-1}} \to Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s$ de manera que*

$$\beta_s(f)(x) = \begin{cases} \beta_s(f(s^{-1} : x)) \ \text{si } x \in X_s^K, \\ 0_x \ \text{si } x \notin X_s^K. \end{cases}$$

Entonces si $\beta := \big(\{\beta_s\}_{s \in K}, \{Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s\}_{s \in K}\big)$, se tiene que $(Ind^H(\mathfrak{B},\alpha), K, \beta)$ es un C^*-sistema dinámico parcial.

Demostración. Primero veamos que $\{Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s\}_{s\in K}$ es una familia continua. Sea U un abierto de $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$. Si $s\in\{r\in K:\ Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_r\cap U\neq\emptyset\}$, entonces existe $f\in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s\cap U$. Como U es abierto, existe $\varepsilon>0$ tal que $B(f,\varepsilon)\subset U$. Como X/H es HLC (por 2.1.9), existe $\phi\in C_c(HX_s^K)^+$ tal que la función $Hx\mapsto\phi(Hx)\|f(x)\|$ dista menos que ε de $Hx\mapsto\|f(x)\|$. Esto implica que la sección continua $g:X\to\mathcal{B}$ tal que $x\mapsto\phi(Hx)f(x)$ está en $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s\cap B(f,\varepsilon)\subset Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s\cap U$.

De acuerdo a 2.1.23, $\{HX_r^K\}_{r\in K}$ es una familia continua, y como $\mathrm{sop}(\phi)$ es compacto tenemos un entorno de s, V, tal que si $r\in V$ entonces $\mathrm{sop}(\phi)\subset HX_r^K$. Con esto tenemos que $g\in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_r$ $\forall r\in V$. Hemos probado que $s\in V\subset\{r\in K:\ Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_r\cap U\neq\emptyset\}$.

Ahora veamos que si $f\in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s^{-1}}$ entonces $\beta_s(f)\in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s$. Primero veamos que es una sección continua, si $x\in X_s^K$ entonces

$$\pi(\beta_s(f)(x))=\pi(\beta_s(f(s^{-1}:x)))=s:\pi(f(s^{-1}:x))=s:s^{-1}:x=x;$$

en el otro caso es inmediato que $\pi(\beta_s(f)(x))=x$.

Ahora veamos que $\beta_s(f)$ es continua. De acuerdo a la fórmula de $\beta_s(f)$, usando que la acción β es continua en el fibrado y en el espacio de base, deducimos que $\beta_s(f)$ es continua en X_s^K.

Ahora, si $x\notin X_s^K$ sabemos que $\beta_s(f)(x)=0_x$, de modo que para probar la continuidad basta con ver que dada una red $\{x_i\}_i\subset X_s^K$ que converge a x se tiene que $\beta_s(f(s^{-1}:x_i))\to 0_x$. Como $\pi(\beta_s(f(s^{-1}:x_i)))=x_i\to x$, alcanza con probar que $\|\beta_s(f(s^{-1}:x_i))\|=\|f(s^{-1}:x_i)\|\to 0$.

Tomemos $\varepsilon>0$; existe un compacto $T\subset HX_{s^{-1}}^H$ tal que $\{Hx:\ \|f(x)\|>\varepsilon\}\subset T$. Supongamos que no existe i_0 tal que si $i\geqslant i_0$ entonces $H(s^{-1}:x_i)\notin T$. En ese caso podemos tomar una red, $\{Hs^{-1}:x_{i_j}\}_j$, contenida en T, y eventualmente pasando a una subred, podemos suponer que $Hs^{-1}:x_{i_j}\to Hz$ para un $z\in X_{s^{-1}}^K$. De acuerdo a 2.1.9, tal vez pasando a una subred podemos suponer que existe una red $\{t_j\}_j\subset H$ tal que $s^{-1}:x_{i_j}\in X_{t_j^{-1}}^H$ y $t_j\cdot s^{-1}:x_{i_j}\to z$. Como las acciones conmutan tenemos que $x_{i_j}\in X_{t_j^{-1}}^H$, $t_j\cdot x_{i_j}\in X_s^K$, y además $t_j\cdot x_{i_j}=s:s^{-1}:t_j\cdot x_{i_j}\to s:z$.

Además, la acción de H es propia y $(x_{i_j},t_j\cdot x_{i_j})\to(x,s:z)$, así que tomando una subred podemos suponer que $t_j\to t$, $x\in X_{t^{-1}}^H$, $t\cdot x=s:z$. Pero como las acciones conmutan, se tiene que $x\in t^{-1}\cdot(X_{t^{-1}}^H\cap X_s^K)=s:(X_{s^{-1}}^K\cap X_t^H)\subset X_s^K$, lo cual es absurdo. Por lo tanto existe i_0 tal que si $i\geqslant i_0$, entonces $Hs^{-1}:x_i\notin T$. En consecuencia $\|\beta_s(f(s^{-1}:x_i))\|=\|(f(s^{-1}:x_i))\|\leqslant\varepsilon$.

Para ver que $\beta_s(f)$ respeta las α-órbitas tomamos $t\in H,\ x\in X_{t^{-1}}^H$. Si $t^{-1}\cdot x\in X_s^K$, como las acciones conmutan: $x\in X_s^K,\ s^{-1}:x\in X_{t^{-1}}^H$ y $t^{-1}\cdot s^{-1}:x=s^{-1}:t^{-1}\cdot x$. Luego

$$\begin{aligned}\beta_s(f)(t^{-1}\cdot x)&=\beta_s(f(s^{-1}:t^{-1}\cdot x))=\beta_s(f(t^{-1}\cdot s^{-1}:x))=\beta_s(\alpha_t(f(s^{-1}:x)))\\&=\alpha_t(\beta_s(f(s^{-1}:x)))=\alpha_t(\beta_s(f)(x)),\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad es consecuencia de que todos los elementos están en el dominio correcto. En el caso en que $t^{-1}\cdot x\notin X_s^K$, $\beta_s(f)(t^{-1}\cdot x)=0_{t^{-1}\cdot x}$. Por otra parte no puede ser que $x\in X_s^K$, porque sería $t^{-1}\cdot x\in t^{-1}\cdot(X_t^H\cap X_s^K)=s:(X_{s^{-1}}^K\cap X_{t^{-1}}^H)\subset X_s^K$, y entonces $\alpha_t(\beta_s(f)(x))=\alpha_t(0_x)=0_{t\cdot x}$.

Para terminar de ver que $\beta_s(f) \in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$, observamos que la función $Hx \mapsto \|\beta_s(f)(x)\| = \|f(s^{-1}:x)\|$ es la composición de $Hx \mapsto \|f(x)\|$ con el homeomorfismo $X/H_s \to X/H_{s^{-1}}$ tal que $Hx \mapsto s^{-1}: Hx = Hs^{-1}x$.

Ahora veamos que $\beta_s(Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s^{-1}} \cap Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_r) = Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s \cap Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{sr}$. Observamos que el conjunto $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s \cap Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_r$ es igual a

$$\{f \in C^b(\mathfrak{B}) \text{ respeta las } \alpha-\text{órbitas y } Hx \mapsto \|f(x)\| \in C_0((X/H)_s \cap (X/H)_r)\}.$$

Deducimos lo que queremos recurriendo a 2.1.23 para afirmar que $(X/H)_{s^{-1}} \cap (X/H)_r \to (X/H)_s \cap (X/H)_{sr}$ $Hx \mapsto Hs : x$ es un homeomorfismo.

Verificar que $\beta_r\beta_s : Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s^{-1}} \cap Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{(rs)^{-1}} \to Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_s \cap Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{rs}$ coincide con la restricción de β_{rs}, se reduce a considerar dos casos: según $x \in X^K_s \cap X^K_{rs}$ o no. En el primer caso:

$$\beta_r\beta_s(f)(x) = \beta_r\beta_s(f(s^{-1}:r^{-1}:x)) = \beta_{rs}(f((rs)^{-1}x)) = \beta_{rs}(f)(x).$$

Y el segundo caso, $x \notin X^K_s \cap X^K_{rs}$, entonces $\beta_r\beta_s(f)(x) = 0_x = \beta_{rs}(f)(x)$. La primera igualdad es porque: si $x \notin X^K_r$ entonces $\beta_r\beta_s(f)(x) = \beta_r(\beta_s(f))(x) = 0_x$, mientras que si $x \in X^K_r$ entonces $r^{-1}: x \notin X^K_s \Rightarrow \beta_r\beta_s(f)(x) = \beta_r(\beta_s(f)(r^{-1}:x)) = \beta_r(0_{r^{-1}:x}) = 0_x$. Para la segunda, $f = 0$ fuera de $X^K_{s^{-1}} \cap X^K_{(rs)^{-1}}$, de modo que si $x \notin X^K_{(rs)^{-1}} \Rightarrow \beta_{rs}(f)(x) = 0_x$, y si $x \in X^K_{(rs)^{-1}}$ no puede ser $(rs)^{-1}: x \in X^K_{s^{-1}} \cap X^K_{(rs)^{-1}}$, lo que lleva a $\beta_{rs}(f)(x) = \beta_{rs}(f((rs)^{-1}:x)) = \beta_{rs}(0_{(rs)^{-1}:x}) = 0_x$.

Finalmente probemos la continuidad. Tomemos una red $\{(s_i,f_i)\}_i$ que converge a (s,f) y además $f_i \in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s_i^{-1}}$, $f \in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s^{-1}}$. Fijemos $\varepsilon > 0$; como $T := \{Hx \in X/H : \|f(x)\| \geqslant \varepsilon\}$ es un compacto de $(X/H)_{s^{-1}}$ y X/H es HLC, existe $\psi \in C_c((X/H)_{s^{-1}})^+$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ y $\psi(z) = 1$ si $z \in T$. Además existe un compacto $D \subset X^K_{s^{-1}}$ tal que $\text{sop}(\psi) = HD$. Observar que la función $g(x) = \psi(Hx)f(x)$ es un elemento de $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s^{-1}}$ que cumple que $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$. Como D es compacto, existe un entorno compacto de s, W, tal que $W \times C \subset \Gamma_K$. Como $s_i \to s$, existe i_0 tal que si $i \geqslant i_0$ entonces $s_i \in W$. Luego $g \in Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)_{s_i^{-1}}$ si $i \geqslant i_0$. Ahora, si $i \geqslant i_0$, tenemos que:

$$\|\beta_{s_i}(f_i) - \beta_s(f)\| \leqslant \|\beta_{s_i}(f_i - g)\| + \|\beta_{s_i}(g) - \beta_s(g)\| + \|\beta_s(g - f)\| \leqslant \|\beta_{s_i}(g) - \beta_s(g)\| + 3\varepsilon.$$

Por lo tanto, para probar la continuidad basta con probar que $\|\beta_{s_i}(g) - \beta_s(g)\| \to 0$ (para simplificar suponemos que $s_i \in W\ \forall\ i$). Comenzamos observando que la imagen de $W \times D$ por la función $(s,x) \mapsto s : x$ es un compacto al que llamamos C; achicando W lo suficiente podemos suponer que $C \subset X^K_s$. Si $Hx \notin HC$ entonces $\|\beta_{s_i}(g)(x) - \beta_s(g)(x)\| = 0$, y si $Hx \in HC$ entonces existe $t \in H$ tal que $x \in X^H_{t^{-1}}$ y $t \cdot x \in C$; luego $\|\beta_{s_i}(g)(x) - \beta_s(g)(x)\| = \|\alpha_t(\beta_{s_i}(g)(x) - \beta_s(g)(x))\| = \|\beta_{s_i}(g)(t\cdot x) - \beta_s(g)(t\cdot x)\|$. Con esto concluimos que para todo i a partir de cierto i_0 se cumple que

$$\|\beta_{s_i}(g) - \beta_s(g)\| = \sup\{\|\beta_{s_i}(g)(x) - \beta_s(g)(x)\| :\ x \in C\}.$$

Si $\lim_i \|\beta_{s_i}(g) - \beta_s(g)\| \neq 0$, entonces existen un $\varepsilon > 0$, una subred $\{s_{i_j}\}_j$ de $\{s_i\}_i$ y una red $\{x_j\}_j \subset C$, tales que $\|\beta_{s_{i_j}}(g)(x_j) - \beta_s(g)(x_j)\| \geqslant \varepsilon$. Pero se puede suponer que la red $\{x_j\}_j$ tiene una subred convergente a un punto $x \in C$. Por otra parte, como $C \subset X_s^K$, podemos suponer que a partir de cierto j_0 tenemos que $x \in X_{s_{i_j}}^K$. Luego $\lim_j \beta_{s_{i_j}}(g)(x_j) = \lim_j \beta_{s_{i_j}}(g(s_{i_j}^{-1} : x_j) = \beta_s(g(s^{-1} : x))$, $\lim_j \beta_s(g)(x_j) = \beta_s(g(s^{-1} : x))$. Esto, junto con la continuidad de la función $\| \ \|$, implica que $\lim_j \|\beta_{s_{i_j}}(g)(x_j) - \beta_s(g)(x_j)\| = 0$, lo que es absurdo. $\square$

Capítulo 3

Un teorema de Imprimitividad

El resultado que se probará en este capítulo es

Teorema 3.0.7. *Sean α y β acciones parciales de H y K respectivamente (ambos HLC) en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$. Si las acciones son libres, propias, conmutan y son continuas en ∞, entonces los productos cruzados $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes_\beta K$ e $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes_\alpha H$ son Morita-Rieffel equivalentes.*

En [12] se prueba este teorema para acciones globales en un fibrado trivial, aunque no aparece enunciado de ese modo. Lo que hemos hecho, en la sección 3.1, es adaptar, a fibrados de C^*-Álgebras en general, las construcciones y los resultados allí encontrados. La mayoría de ellos funcionan sin modificación alguna, en otros son necesarios algunos (pequeños) cambios.

La demostración del teorema se hará en dos pasos; primero nos ocupamos del caso de acciones globales y luego de la situación general, en la cual usaremos la anterior.

3.1. El caso de acciones globales

Hipótesis general 3.1.1. Son las hipótesis del teorema anterior con la condición adicional de que ambas acciones son globales, y por lo tanto la continuidad en ∞ puede omitirse pues es automática.

En este caso podemos definir α en $C^b(\mathfrak{B})$, si $f \in C^b(\mathfrak{B})$, $t \in H$ y $x \in X$:

$$\alpha_t(f)(p) := \alpha_t(f(t^{-1} \cdot p)).$$

Es sencillo ver que tenemos una acción $\alpha : H \to Aut(C^b(\mathfrak{B})) \mid t \mapsto \alpha_t$, que no es continua en general. El álgebra $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)$ está formada por los puntos fijos, f, de esta acción, para los cuales $xH \mapsto \|f(x)\| \in C_0(X/H)$.

Proposición 3.1.2. *Si restringimos la acción α a $C_0(\mathfrak{B})$ obtenemos un C^*-sistema dinámico $(C_0(\mathfrak{B}), H, \alpha)$.*

Demostración. Lo único que hay que ver es la continuidad, como $C_c(\mathfrak{B})$ es denso en $C_0(\mathfrak{B})$ basta con probar la continuidad de $t \mapsto \alpha_t(f)$ para $f \in C_c(\mathfrak{B})$. Para eso usamos un argumento que ya hemos utilizado. Fijada $f \in C_c(\mathfrak{B})$, basta con probar la continuidad de $t \mapsto \alpha_t(f)$ en la identidad $e \in H$. Sea $\{t_i\}_i \subset H$ una red que converge a e. Si $\text{lím}_i \|f - \alpha_{t_i}(f)\| \neq 0$, entonces podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ y una red $\{x_i\}_i \subset X$ tales que $a_i := \|f(x_i) - \alpha_{t_i}(f)(x_i)\| > \varepsilon$ para todo i. Luego puede verse que (tomando subredes) se puede suponer que x_i tiene límite, lo que nos llevará a que $\text{lím}_i a_i = 0$, lo que es absurdo. □

Lema 3.1.3. *En las hipótesis 3.1.1, las acciones α y β de H y K respectivamente en $C^b(\mathfrak{B})$, conmutan. Además $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)$ es invariante por β, y la restricción de β a $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)$ es una acción continua.*

Demostración. La conmutatividad es prácticamente inmediata a partir de la definición. Lo demás se deduce inmediatamente de 2.3.6. □

3.1.1. Construcciones

Subálgebras

Observación 3.1.4. *Topología del límite inductivo.*

Supongamos por un momento que $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, Y, \pi)$ es un fibrado de Banach. Dado un compacto $K \subset Y$, el conjunto de las secciones continuas de $\mathfrak{D}$ con soporte contenido en K, $C_K(\mathfrak{D})$, es un espacio de Banach con la norma del supremo, y además $C_K(\mathfrak{D}) \subset C_c(\mathfrak{D})$ como subespacio cerrado. Denotamos $\iota_K : C_K(\mathfrak{D}) \to C_c(\mathfrak{D})$ a la inclusión. La topología del límite inductivo en $C_c(\mathfrak{D})$ es la mayor topología vectorial localmente convexa para la cual ι_K es continua para todo compacto $K \subset Y$.

En [6] II se prueba la existencia de tal topología y la siguiente propiedad universal: para cada espacio localmente convexo M y mapa lineal $F : C_c(\mathfrak{D}) \to M$, F es continua sii $F \circ \iota_K$ es continua para todo compacto $K \subset Y$. También se prueba que una base de entornos de 0 está compuesta por los conjuntos convexos $V \subset C_c(\mathfrak{D})$ tales que $V \cap C_K(\mathfrak{D})$ es un entorno de 0 en $C_K(\mathfrak{D})$, para todo compacto $K \subset Y$.

En general, verificar que una red converge a un punto en la topología del límite inductivo es algo complicado, por eso definimos otro tipo de convergencia que es suficiente para nuestros propósitos.

Definición 3.1.5. Dado un fibrado de Banach $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, Y, \pi)$, decimos que la red $\{f_i\}_i \subset C_c(\mathfrak{D})$ *converge fuertemente en el límite inductivo* a $f \in C_c(\mathfrak{D})$ si: $\text{lím}_i \|f_i - f\| = 0$ y además existen un compacto $K \subset Y$ y un índice i_0 tal que si $i \geqslant i_0 \Rightarrow \text{sop}(f_i) \subset K$.

Afirmación 3.1.6. *Si una red converge fuertemente en el límite inductivo, entonces converge a la misma función en el límite inductivo.*

Demostración. Es inmediato a partir de la caracterización de los entornos convexos de la Observación 3.1.4. $\square$

Proposición 3.1.7. *Si $\mathfrak{D}$ es un fibrado de Fell, entonces todo subconjunto denso en $C_c(\mathfrak{D})$ con la topología del límite inductivo es denso en $C^*(\mathfrak{D})$. En particular, si (A, G, α) es un C^*-sistema dinámico (parcial), todo subconjunto denso en $C_c(\mathcal{B}_\alpha)$ con la topología del límite inductivo es denso en $A \rtimes_\alpha G$.*

Demostración. Basta con probar que la topología inducida por $C^*(\mathfrak{D})$ está incluida en la topología del límite inductivo, y a su vez, para eso basta con ver que $\iota_K : C_K(\mathfrak{D}) \to (C_c(\mathfrak{D}), \| \ \|_{C^*(\mathfrak{D})})$ es continua para cada compacto $K \subset G$. Pero si $f \in C_K(\mathfrak{D})$ se tiene que $\|f\|_{C^*(\mathfrak{D})} \leqslant \|f\|_1 \leqslant \mu(K)\|f\|_\infty$. $\square$

Afirmación 3.1.8. *Supongamos que $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, Y, \pi)$ es un fibrado de Banach, que Y es un espacio HLC y $F : Y \to C^b(\mathfrak{D})$ es una función continua. Entonces dadas dos redes $\{y_i\}_i \subset Y$ y $\{x_i\}_i \subset X$, ambas convergentes, $y_i \to y$, $x_i \to x$, se cumple que $F(y_i)(x_i) \to F(y)(x)$.*

Demostración. Consecuencia de la Proposición 13.12 de [6]. $\square$

Definición 3.1.9. Si Y es un espacio topológico HLC, definimos $C_{cc}(Y, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ como el conjunto de las funciones $f \in C(Y \times X, \mathcal{B})$ tales que:

- $\pi(f(y, x)) = x \ \forall \ (y, x) \in Y \times X$.
- $f(y, t \cdot x) = \alpha_s(f(y, x)) \ \forall \ (y, x) \in Y \times X, \ t \in H$.
- Existen compactos $C_f \subset Y$, $T_f \subset X/H$ tales que $f(y, x) = 0$ si $(y, Hx) \notin C \times T$.

Observación 3.1.10. La definición anterior permite equipar $C_{cc}(Y, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ con la suma y el producto por escalares punto a punto, con lo que resulta un espacio vectorial.

Lema 3.1.11. *Sea α una acción propia del grupo HLC H en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B}$. Dada $f \in C_{cc}(Y, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$, la función $y \mapsto f(y, \cdot)$ está en $C_c(Y, Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha))$. De esta manera $C_{cc}(Y, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ es un subespacio de $C_c(Y, Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha))$, que es denso en la topología del límite inductivo.*

Demostración. Claramente la definición implica que, para cada $y \in Y$, la función $\psi_f(y) : \ x \mapsto f(y, x)$ es un elemento de $Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha)$.

Llamemos ψ_f a la función $y \mapsto f(y, \cdot)$, y probemos que es continua. Supongamos por absurdo que no lo es. En ese caso existen: un $\varepsilon > 0$, una red convergente $\{y_i\}_i \subset Y \mid y_i \to Y$ y una red $\{x_i\}_i \subset X$, tales que $\|f(y_i, x_i) - f(y, x_i)\| \geqslant \varepsilon \ \forall \ i$. Como para cada i no puede ser

$f(y_i, x_i) = f(y, x_i) = 0$, se tiene que $Hx_i \in T \; \forall \, i$. Por 2.1.9 existe un compacto $D \subset X$ tal que $HD = T$, y por lo tanto para cada i existe $t_i \in H$ tal que $t_i \cdot x_i \in D$. Además

$$\|f(y_i, t_i \cdot x_i) - f(y, t_i \cdot x_i)\| = \|\alpha_{t_i}(f(y_i, x_i) - f(y, x_i))\| = \|f(y_i, x_i) - f(y, x_i)\| \geqslant \varepsilon$$

Cambiamos la red $\{x_i\}_i$ por $\{t_i \cdot x_i\}_i \subset D$ y, tomando una subred convergente si fuera necesario, podemos suponer que $(y_i, x_i) \mapsto (y, x)$. Pero como f es continua y la función $\| \; \| : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ también, tenemos que $\lim_i \|f(y_i, x_i) - f(y, x_i)\| = 0$, lo que contradice lo que supusimos.

Por otra parte, la inclusión $C_{cc}(Y, Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)) \subseteq C_c(Y, Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ es consecuencia de que $t \mapsto f(y, \cdot)$ es la función nula sii $f = 0$. En cuanto a la densidad, por el Lema 1.87. de [12] las funciones de la forma $y \mapsto \psi(y)g$, con $\psi \in C_c(X)$ y $g \in Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha)$, son densas en $C_c(Y, Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ en la topología del límite inductivo. Pero $y \mapsto \psi(y)g$ corresponde a $(y, x) \mapsto \psi(y)g(x)$. □

En el caso particular que nos interesa:

Lema 3.1.12. *En las hipótesis 3.1.1, $C_{cc}(K, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ es una $*$-subálgebra densa del producto cruzado $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes K$.*

Demostración. Por el lema anterior y 3.1.7 basta con ver que $C_{cc}(K, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ es cerrado por la adjunción y la multiplicación. Sea $f \in C_{cc}(K, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$; si ψ_f es la función $y \mapsto f(y, \cdot)$ entonces $\psi_f^*(s)(x) = \Delta_K(s^{-1})\beta_s(\psi_f(s^{-1})^*)(x) = \Delta_K(s^{-1})\beta_s(f(s^{-1}, s^{-1} : x)^*)$. Definiendo

$$f^*(s, x) = \Delta_K(s^{-1})\beta_s(f(s^{-1}, s^{-1} : x)^*),$$

y usando que α y β conmutan se prueba que $f^* \in C_{cc}(K, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$. Además es inmediato que $\psi_{f^*} = (\psi_f)^*$.

Para ver que es cerrado por el producto tomemos $f, g \in C_{cc}(K, Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha))$, definimos $f * g(s, x) := \psi_f * \psi_g(s)(x)$. Notar que $\pi(f * g(s, x)) = \pi(\psi_f * \psi_g(s)(x)) = x$ porque $\psi_f * \psi_g(s) \in C^b(\mathfrak{B})$, y también $\alpha_t(f * g(s, x)) = f * g(s, t \cdot x)$ porque $\psi_f * \psi_g(s)$ respeta las α-órbitas.

La continuidad de $f * g$ es consecuencia de la Afirmación 3.1.8 tomando $F = \psi_f * \psi_g$. Resta ver la última propiedad de la definición 3.1.9. Si $f * g(s, x) \neq 0$, entonces $\psi_f * \psi_g(s) \neq 0$ y en consecuencia $s \in \operatorname{sop}(\psi_f * \psi_g) =: C_{f*g}$, que es compacto. Por otra parte

$$\begin{aligned} f * g(s, x) = \psi_f * \psi_g(s)(x) &= \int_K \psi_f(r)\beta_r(\psi_g(r^{-1}s))d\mu_K(r)(x) \\ &= \int_K f(r, x)\beta_r(g(r^{-1}s, r^{-1} : x)d\mu_K(r). \end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad se usó que la evaluación en x es continua en la topología de $C^b(\mathfrak{B})$, que es respecto a la cual se hace la integral. Concluimos que si $f * g(s, x) \neq 0$, debe existir $r \in K$ tal que $f(r, x)\beta_r(g(r^{-1}s, r^{-1} : x)) \neq 0$. Entonces $Hx \in C_f : T =: T_{f*g}$, donde T_g es el compacto dado en la definición 3.1.9 para g. En conclusión $\psi_{f*g} = \psi_f * \psi_g$. □

De acuerdo al lema anterior pensamos $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)\rtimes_\beta K$ como la completación de la pre C^*-álgebra $C_{cc}(K, Ind_c^H(\mathfrak{B},\alpha))$ (equipando esta última con la norma de la primera). Las operaciones están dadas por:

$$f*g(s,x)=\int_K f(r,x)\beta_r(g(r^{-1}s,r^{-1}:x)d\mu_K(r)$$
$$f^*(s,x)=\Delta_K(s^{-1})\beta_s(f(s^{-1},s^{-1}:x)^*)$$

El siguiente resultado nos permite construir funciones de $C_{cc}(Y, Ind_c^H(\mathfrak{B},\alpha))$.

Lema 3.1.13. *Si $F\in C_c(Y\times X,\mathfrak{B})$ es tal que $\pi(F(y,x))=x$, $\forall\ (y,x)\in Y\times X$, y la acción α de H en $\mathfrak{B}$ es propia, entonces la función*

$$\psi(y,x):=\int_H \alpha_s(F_y)(x)d\mu_H(s),$$

es un elemento de $C_{cc}(Y, Ind_c^H(\mathfrak{B},\alpha))$, donde, para un $y\in Y$ fijo, la función $F_y:X\to\mathfrak{B}$ está dada por $F_y(x)=F(y,x)$.

Demostración. Primero observamos que la integral se realiza en la fibra $\mathcal{B}_x$. Además, para cada $y\in Y$ la función $x\mapsto F(y,x)$ es una función de $C_c(\mathfrak{B})$ y por lo tanto $s\mapsto\alpha_s(F_y)$ es continua (Proposición 3.1.2). En consecuencia componer esta función con la evaluación en x es continua. Por otra parte, si $\mathrm{sop}(F)\subset C\times D$, con $C\subset Y,\ D\subset X$, ambos compactos, entonces el soporte de $s\mapsto\alpha_s(F(y,\cdot))(x)$ está incluido en el compacto $\{s\in H:\ s^{-1}\{x\}\cap D\neq\emptyset\}$. Estas consideraciones prueban que la integral de la tesis está definida.

Para ver que es continua fijemos $(y_0,x_0)\in Y\times X$. Sean U y V entornos compactos de y_0 y x_0 respectivamente. Definimos la función $g:U\times H\to C_V(\mathfrak{B})\mid g(y,s)=\alpha_s(F_y)$. El soporte de dicha función es un subconjunto del compacto $U\times\{s\in H:\ s^{-1}V\cap D\neq\emptyset\}$. La continuidad de g se deduce razonando por absurdo.

Con lo que acabamos de ver podemos definir una función continua $G:U\to C_V(\mathfrak{B})$, tal que $y\mapsto\int_H g(y,s)d\mu_H(s)$. Como la evaluación es continua tenemos que $G(y)(x)=\psi(y,x)$. Ahora la continuidad de ψ en $U\times V$ es consecuencia de 3.1.8. Con esto se concluye la demostración de que ψ es continua.

Veamos las otras propiedades. Por lo que se observó al inicio $\psi(y,x)$ está definido como una integral en la fibra $\mathcal{B}_x$, y por lo tanto $\pi(\psi(y,x))=x$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\psi(y,t\cdot x)&=\int_H\alpha_s(F(y,s^{-1}t\cdot x))d\mu_H(s)=\int_H\alpha_s(F(y,(t^{-1}s)^{-1}\cdot x))d\mu_H(s)\\&=\int_H\alpha_t\alpha_r(F(y,r^{-1}\cdot x))d\mu_H(s)=\alpha_t\left(\int_H\alpha_r(F(y,r^{-1}\cdot x))d\mu_H(s)\right)\\&=\alpha_t(\psi(y,x)).\end{aligned}$$

Finalmente, si $\psi(y,x)\neq 0$ entonces existe $s\in H$ tal que $F(y,s^{-1}\cdot x)\neq 0$; luego $(y,s^{-1}\cdot x)\in C\times D\ \Rightarrow\ (y,Hx)\in C\times HD$, de modo que se puede tomar $C_\psi:=C$ y $T_\psi=HD$. $\square$

El bimódulo de equivalencia

En la demostración del teorema que nos ocupa trabajaremos con las $*$-subálgebras densas

$$E_H := C_{cc}(H, Ind_c^K(\mathfrak{B},\beta)) \subset Ind^K(\mathfrak{B},\beta) \rtimes_\alpha H$$

$$E_K := C_{cc}(K, Ind_c^H(\mathfrak{B},\alpha)) \subset Ind^H(\mathfrak{B},\alpha) \rtimes_\beta K,$$

mientras que el $E_H - E_K$ pre-bimódulo de equivalencia será $Z := C_c(\mathfrak{B})$, con las siguientes operaciones: sean $b \in E_H,\ c \in E_K,\ f, g \in Z$

$$b \cdot f := \int_H b(t,\cdot)\alpha_t(f)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(t).$$

$$f \cdot c := \int_K \beta_s\left(fc(s^{-1},\cdot)\right)\Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} d\mu_K(s).$$

$${}_{E_H}\langle f, g\rangle(t,x) := \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} \int_K \beta_s(f\alpha_t(g^*))(x) d\mu_K(s).$$

$$\langle f, g\rangle_{E_K}(s,x) := \Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} \int_H \alpha_t(f^*\beta_s(g))(x) d\mu_H(t).$$

Antes de continuar debemos probar que las definiciones son correctas. Basta con hacer esto para $b \cdot f$ y ${}_{E_H}\langle f, g\rangle$ ya que las otras dos se razonan en forma análoga.

En cuanto a $b \cdot f$, observar que para cada $t \in H$ la función $b(t,\cdot)\alpha_t(f)$ tiene soporte contenido en $t \cdot \mathrm{sop}(f)$. Pero a su vez $\{t : b(t,\cdot) \neq 0\} \subset C_b$ (aquí C_b es el compacto en la definición 3.1.9), luego todas las funciones $b(t,\cdot)\alpha_t(f)$ tienen soporte en $W := C_b \cdot \mathrm{sop}(f)$. Por otra parte, si la función $G : H \to C_W(\mathfrak{B})$, dada por $t \mapsto b(t,\cdot)\alpha_t(f)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}$, es continua y de soporte compacto, tiene sentido definir su integral en $C_W(\mathfrak{B})$, la cual será exactamente $b \cdot f$. La continuidad de G es consecuencia de 3.1.11, 3.1.2 y la continuidad de la multiplicación en $C^b(\mathfrak{B})$. Por otra parte $\mathrm{sop}(G) \subset C_b$.

Observación 3.1.14. Si $\iota_W : C_W(\mathfrak{B}) \to C_c(\mathfrak{B})$ es la inclusión canónica, hemos definido $b \cdot f := \iota_W(\int_H G d\mu_H)$. La definición de $b \cdot f$ puede pensarse como una integral en la topología del límite inductivo en el siguiente sentido: sean F un espacio localmente convexo completo y $T : C_c(\mathfrak{B}) \to F$ lineal (o conjugada lineal) continua en el límite inductivo; en ese caso

$$T(b \cdot f) = T \circ \iota_W(\int_H G(t) d\mu_H(t)) = \int_H T \circ \iota_W(G(t)) d\mu_H(t) = \int_H T(b(t,\cdot)\alpha_t(f)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}) d\mu_H(t).$$

Las igualdades se deducen de 3.1.4 y de los resultados del Apéndice A. De hecho, tomando T como la evaluación en un punto de X se concluye que la definición no depende de W.

Con respecto a ${}_{E_H}\langle f, g\rangle$, por el Lema 3.1.13 basta con probar que la función $G : H \times X \to \mathfrak{B}$, definida por $(t, x) \mapsto (f\alpha_t(g^*))(x)$, es un elemento de $C_c(H \times X, \mathfrak{B})$ tal que $\pi(G(t, x)) = x$. Esta última propiedad es inmediata porque $f\alpha_t(g^*)$ es una sección. En cuanto a la continuidad, la deducimos de 3.1.2 y 3.1.8. El soporte de G está incluido en el compacto $\{t \in H : t^{-1}\mathrm{sop}(f) \cap \mathrm{sop}(f) \neq \emptyset\} \times \mathrm{sop}(f)$.

El enunciado del teorema es completamente simétrico respecto de H y K; por lo tanto invirtiendo los roles podemos dar a Z una estructura de $E_K - E_H$ pre-bimódulo: si $b \in E_H, c \in E_K,\ f, g \in Z$:

$$f : b := \int_H \alpha_t(fb(t^{-1}, \cdot))\Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} d\mu_H(t).$$

$$c : f := \int_K c(s, \cdot)\beta_s(f)\Delta_K(s)^{\frac{1}{2}} d\mu_K(s).$$

$$\langle f, g\rangle_{E_H}(t, x) := \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} \int_K \beta_s(f^*\alpha_t(g))(x) d\mu_K(s).$$

$${}_{E_K}\langle f, g\rangle(s, x) := \Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} \int_H \alpha_t(f\beta_s(g^*))(x) d\mu_H(t).$$

El siguiente resultado nos permitirá acortar considerablemente la demostración del teorema, debido a que la función $C_c(\mathfrak{B}) \to C_c(\mathfrak{B}) \mid f \mapsto f^*$ es continua en la topología del límite inductivo (ver la observación 3.1.4)

Lema 3.1.15. *(de simetría) Con la notación anterior y en las hipótesis generales 3.1.1 se tiene que:*

$$b^* \cdot f^* = (f : b)^* \qquad c^* : f^* = (f \cdot c)^*$$
$${}_{E_H}\langle f^*, g^*\rangle = \langle f, g\rangle_{E_H} \quad \langle f^*, g^*\rangle_{E_K} = {}_{E_K}\langle f, g\rangle$$

Demostración. Basta con probar las dos igualdades de la izquierda (en los otros casos usamos los mismos argumentos). La inferior se deduce fácilmente observando las fórmulas correspondientes y recordando que $f^{**} = f$. En cuanto a la primera, recurriendo a 3.1.14:

$$\begin{aligned}
b^* \cdot f^* &= \int_H b^*(t, \cdot)\alpha_t(f^*)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(t) = \int_H \Delta_H(t^{-1})\alpha_t(b(t^{-1}, \cdot)^*)\alpha_t(f^*)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(t) \\
&= \int_H \alpha_t(fb(t^{-1}, \cdot))^*\Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} d\mu_H(t) = \left(\int_H \alpha_t(fb(t^{-1}, \cdot))\Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} d\mu_H(t)\right)^* \\
&= (b : f)^*.
\end{aligned}$$

$\square$

Convergencia de los productos internos

Comenzamos por definir una forma de convergencia para las funciones de E_K (E_H), que es análoga a la convergencia fuerte en el límite inductivo.

Definición 3.1.16. La red $\{f_i\}_i \subset E_H$ *converge a* $f \in E_H$ *fuertemente* si existen compactos $C \subset H$, $D \subset X$ y un i_0 tales que: *i*) si $i \geqslant i_0$ entonces $\mathrm{sop}(f_i) \subset C \times KD$ y $\mathrm{sop}(f) \subset C \times KD$; *ii*) $\lim_i \sup\{\|f_i(t,x) - f(t,x)\| : \ (t,x) \in C \times D\} = 0$.

Afirmación 3.1.17. *Si la red* $\{f_i\}_i \subset E_H$ *converge fuertemente a* $f \in E_H$*, entonces converge en la topología del límite inductivo en* $C_c(H, Ind^K(\mathfrak{B}, \beta))$.

Demostración. Veremos que la red converge fuertemente en el límite inductivo (3.1.5). Fijado $t \in H$ la definición implica que para $i \geqslant i_0$: $\sup\{\|f_i(t,x) - f(t,x)\| : \ x \in D\} = \|f_i(t,\cdot) - f(t,\cdot)\|$. Entonces $\sup\{\|f_i(t,\cdot) - f(t,\cdot)\| : \ t \in H\} = \sup\{\|f_i(t,x) - f(t,x)\| : \ (t,x) \in C \times D\}$, de modo que, como $\{f_i\}_i$ converge a f fuertemente en E_H, las funciones $\{t \mapsto f_i(t,\cdot)\}_i$ convergen uniformemente a $t \mapsto f(t,\cdot)$.

Por otra parte, la condición sobre la existencia de los compactos en la definición implica que $\mathrm{sop}(t \mapsto f(t,\cdot)) \subset C$ y, si $i \geqslant i_0$, entonces $\mathrm{sop}(t \mapsto f_i(t,\cdot)) \subset C$. □

Lema 3.1.18. *Dadas dos redes en* $C_c(\mathfrak{B})$ *que convergen fuertemente en el límite inductivo,* $f_i \to f$ *y* $g_i \to g$*, se cumple que* ${}_{E_H}\langle f_i, g_i\rangle \to {}_{E_H}\langle f, g\rangle$ *y* $\langle f_i, g_i\rangle_{E_K} \to \langle f, g\rangle_{E_K}$ *en el límite inductivo.*

Demostración. Comenzamos observando que dados dos compactos $C, D \subset X$ tales que $\mathrm{sop}(f) \subset C$ y $\mathrm{sop}(g) \subset D$, si ${}_{E_H}\langle f, g\rangle(t,x) \neq 0$, entonces existe $s \in K$ tal que $s^{-1} : x \in \mathrm{sop}(f) \subset C$ y $t^{-1} \cdot s^{-1} : x \in \mathrm{sop}(g) \subset D$. Por lo tanto si $W := \{r \in H : r^{-1}C \cap D \neq \emptyset\}$, el soporte de ${}_{E_H}\langle f, g\rangle$ está incluido en $W \times (K : C)$.

Ahora, si $(t,x) \in W \times C$, y definimos $V := \{s \in K : \ s^{-1}D \cap C \neq 0\}$, entonces

$$\|{}_{E_H}\langle f, g\rangle(t,x)\| \leqslant \underbrace{\sup\{\Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} : \ t \in W\}}_{A} \int_V \|f\|\|g\| \leqslant A\mu_K(V)\|f\|\|g\|,$$

de donde

$$\sup\{\|{}_{E_H}\langle f, g\rangle(t,x)\| : \ (t,x) \in W \times C\} \leqslant A\mu_K(V)\|f\|\|g\|.$$

Podemos tomar un i_0 tal que $\mathrm{sop}(f_i) \subset C$ y $\mathrm{sop}(g_i) \subset D$ para todo $i \geqslant i_0$. De acuerdo a las afirmaciones del primer párrafo, observando que W y $K : C$ no dependen de i ni de f o g, tenemos que $\mathrm{sop}({}_{E_H}\langle f_i, g_i\rangle) \subset W \times K : C \ \forall\, i \geqslant i_0$ y $\mathrm{sop}({}_{E_H}\langle f_i, g_i\rangle) \subset W \times K : C$. Por otra parte escribimos ${}_{E_H}\langle f_i, g_i\rangle = {}_{E_H}\langle f_i - f, g_i\rangle + {}_{E_H}\langle f, g_i - g\rangle + {}_{E_H}\langle f, g\rangle$. Luego por lo que acabamos de ver

$$\lim_i \sup\{\|{}_{E_H}\langle f_i - f, g_i\rangle(t,x)\| : \ (t,x) \in W \times C\} \leqslant \lim_i A\mu_K(V)\|f_i - f\|\|g_i\| = 0.$$

Con un razonamiento análogo para ${}_{E_H}\langle f, g_i - g\rangle$, deducimos que

$$\lim_i \sup\{\|{}_{E_H}\langle f_i - f, g_i\rangle(t,x)\| : \ (t,x) \in W \times C\} = 0.$$

Para ver la segunda afirmación usaremos el lema de simetría 3.1.15. Sabemos que $f_i^* \to f^*$ y $g_i^* \to g^*$ fuertemente en el límite inductivo. Intercambiando los roles de H y K y usando lo que acabamos de probar: $\langle f_i, g_i\rangle_{E_K} = {}_{E_K}\langle f_i^*, g_i^*\rangle \to {}_{E_K}\langle f^*, g^*\rangle = \langle f, g\rangle_{E_K}$. □

Unidades aproximadas

El resultado clave para la demostración del teorema que queremos probar es el siguiente:

Proposición 3.1.19. *Bajo las hipótesis generales 3.1.1, existe una red* $\{p_m\}_{m\in M} \subset E_H$ *que cumple las siguientes propiedades:*

(a) Para todo $c \in E_H$ *se cumple que* $\lim_m p_m * c = c$ *fuertemente.*

(b) Para toda $f \in Z$ *se cumple que* $\lim_m p_m \cdot f = f$ *fuertemente en el límite inductivo (recordar que* $Z = C_c(\mathfrak{B})$ *visto como módulo).*

(c) Para todo $m \in M$ *existen* $n_m \in \mathbb{Z}^+$ *y* $f_1, \ldots, f_{n_m} \in Z$ *tales que* $p_m = \sum_{i=1}^{n_m} {}_{E_H}\langle f_i, f_i\rangle$

Para probarlo necesitamos varios lemas previos.

Lema 3.1.20. *En las hipótesis generales 3.1.1, dados* $z \in Z$*, un compacto* $C \subset H$ *y una unidad aproximada de* $C_0(\mathfrak{B})$*,* $\{e_i\}_i$*, se cumple que:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, i_0 : \ \textit{si } i \geqslant i_0,\ t \in C\ \Rightarrow \|\alpha_t(e_i)z - z\| < \varepsilon.$$

Demostración. La demostración es por absurdo: si no se cumple la tesis podemos encontrar una red $\{t_j\}_j \subset C$, una subred $\{e_{i_j}\}_j$ y un $\varepsilon > 0$ tales que: $\|\alpha_{t_j}(e_{i_j})z - z\| \geqslant \varepsilon$. Como C es compacto, tomando una subred, podemos suponer que $t_j \to t \in C$. Ahora

$$\|\alpha_{t_j}(e_{i_j})z - z\| \leqslant \|\alpha_{t_j}(e_{i_j})z - \alpha_t(e_{i_j})z\| + \|\alpha_t(e_{i_j})z - z\|.$$

El segundo miembro de la derecha tiende a cero con j porque $\{\alpha_t(e_{i_j})\}_j$ es una unidad aproximada. Para concluir la prueba basta con mostrar que el primer miembro tiende a cero con j. Definimos $w := \alpha_{t^{-1}}(z)$ y $r_j := t^{-1}t_j \to e$. Luego:

$$\begin{aligned}\|\alpha_{t_j}(e_{i_j})z - \alpha_t(e_{i_j})z\| &= \|\alpha_{r_j}(e_{i_j})w - e_{i_j}w\| \\ &\leqslant \|\alpha_{r_j}(e_{i_j})\|\|w - \alpha_{r_j}(w)\| + \|w - \alpha_{r_j}(w)\|.\end{aligned}$$

Todos los términos de la parte inferior derecha tienden a cero por 3.1.2. □

Lema 3.1.21. *En las hipótesis generales 3.1.1, sea $\{b_l\}_{l\in L}$ una unidad aproximada de $Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$. Si para cada $b\in E_H$ se define $b_l\cdot b$ como la función: $(t,x)\in H\times X\mapsto b_l(x)c(t,x)$, entonces:*

a) Para cada $z\in Z$ se tiene que $b_l z\to z$ fuertemente en el límite inductivo.

b) Para cada $b\in E_H$ se tiene que $b_l\cdot b\to b$ fuertemente en el límite inductivo.

Demostración. Prueba de *b)*: observamos que para todo l se tiene que $\mathrm{sop}(b_l\cdot b)\subset \mathrm{sop}(b)$, y por lo tanto basta con probar la convergencia uniforme. Tomemos un compacto $C\subset H$ tal que $\{t\in H:\ b(t,\cdot)\neq 0\}\subset C$. Supongamos que $\lim_l \sup\{\|b_l c(t,\cdot)-c(t,\cdot)\|:\ t\in H\}\neq 0$. En ese caso existen un $\varepsilon>0$, una subred $\{b_{l_i}\}_i$ y una red $\{t_i\}_i\subset H$, tales que $\|b_{l_i}c(t_i,\cdot)-c(t_i,\cdot)\|\geqslant\varepsilon$. Luego para cada i se tiene $b_{l_i}c(t_i,\cdot)\neq 0$ o $c(t_i,\cdot)\neq 0$, y en ambos casos tenemos $t_i\in C$. Tomando una subred podemos suponer que $t_i\to t$. Pero

$$\|b_{l_i}c(t_i,\cdot)-c(t_i,\cdot)\|\leqslant\|b_{l_i}\|\|c(t_i,\cdot)-c(t,\cdot)\|+\|b_{l_i}c(t,\cdot)-c(t,\cdot)\|+\|c(t,\cdot)-c(t_i,\cdot)\|.$$

Todos los términos del miembro derecho tienden a cero, lo que nos conduce a un absurdo.

Prueba de *a)*: como antes basta con probar la convergencia uniforme. Como la acción de H es propia y libre, por el Lema 2.1.14, existe $w\in C_c(X)^+$ tal que $\int_K w(s^{-1}\cdot x)d\mu_K(s)=1\ \forall\ x\in\mathrm{sop}(z)$. Fijemos un compacto $C\subset K$ tal que $\{r\in K: r^{-1}\mathrm{sop}(z)\cap\mathrm{sop}(w)\}\subset C$. Tomando $\delta\in(0,\frac{\varepsilon}{\|z\|+2})$, y usando el lema anterior, concluimos que existe $a\in C_0(\mathfrak{B})$ tal que $\|\beta_s(a)z-z\|<\delta,\ \forall\ s\in C$. Multiplicando a por una función conveniente de soporte compacto podemos suponer que $a\in C_c(\mathfrak{B})$.

Definimos $b(x):=\int_K w(s^{-1}\cdot x)\beta_s(a)(x)d\mu_K(s)$. Por el lema 3.1.13 ($Y$ consta de un solo punto), $b\in Ind_c^K(\mathfrak{B},\beta)$. Además, si $x\notin\mathrm{sop}(z)$, entonces $\|b_l(x)z(x)-z(x)\|=0$, y si $x\in\mathrm{sop}(z)$:

$$\|b_l(x)z(x)-z(x)\|\leqslant\int_K w(s^{-1}\cdot x)\|\beta_s(a)z-z\|d\mu_K(s)\leqslant\delta.$$

La desigualdad se deduce de que $w(s^{-1}\cdot x)\|\beta_s(a)z-z\|\leqslant w(s^{-1}\cdot x)\delta$. Concluimos que $\|bz-z\|\leqslant\delta$. Finalmente tomamos l_0 tal que si $l\geqslant l_0$ entonces $\|b_l b-b\|<\delta$, y calculamos, si $l\geqslant l_0$:

$$\|b_l z-z\|\leqslant\|b_l\|\|bz-z\|+\|b_l b-b\|\|z\|+\|bz-z\|<(2+\|z\|)\delta<\varepsilon.$$

□

Proposición 3.1.22. *En las hipótesis 3.1.1 supongamos que $\{b_l\}_{l\in L}$ es una unidad aproximada de $Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$ y que para cada 4−upla (T,U,l,ε), que consiste en un compacto $T\subset X/K$, un entorno compacto U de $e\in H$, un $l\in L$ y un $\varepsilon>0$, existe una función $p=p_{(T,U,l,\varepsilon)}\in E_H$ tal que:*

a) $p(t,x)=0$ si $t\notin U$.

b) $\int_K \|p(t,x)\| d\mu_H(t) \leqslant 4$ *si* $Kx \in T$.

c) $\| \int_K p(t,x) d\mu_H(t) - b_l(x)\| \leqslant \varepsilon$ *si* $Kx \in T$.

En ese caso la red $\{p_{(T,U,l,\varepsilon)}\}_{(T,U,l,\varepsilon)}$ *dirigida por* T, l *crecientes y* U, ε *decrecientes, satisface las condiciones a) y b) de la tesis de 3.1.19.*

Demostración. Para probar que satisface *b)*, es suficiente probar la convergencia fuerte en el límite inductivo. Fijemos $z \in Z$, un entorno compacto de $e \in H$, U_0, y un $\varepsilon > 0$. Como $U_0\mathrm{sop}(z)$ es compacto, $T_1 := KU_0\mathrm{sop}(z)$ es compacto en X/K. Tomemos un entorno de $e \in H$, U_1, tal que si $t \in U_1$ entonces $\|\alpha_t(z) - z\| < \varepsilon$; esto se puede hacer por 3.1.2. Por el lema anterior existe un l_0 tal que si $l \geqslant l_0$ entonces $\|b_l z - z\| < \varepsilon$.

Si $(T, U, l, \varepsilon') \geqslant (T_1, U_1, l_1, \varepsilon)$, sea $p = p_{(T,U,l,\varepsilon')}$. Dado $x \in X$ tal que $p \cdot z(x) \neq 0$, existe $t \in H$ tal que $p(t,x)\alpha_t(z)(x) \neq 0$, en cuyo caso $t \in U_1$ y $t^{-1} \cdot x \in \mathrm{sop}(z)$. Finalmente $\mathrm{sop}(p \cdot z) \subset U_0\mathrm{sop}(z)$. Observar que trivialmente $\mathrm{sop}(z) \subset U_0\mathrm{sop}(z)$.

Tomemos $x \in U_0\mathrm{sop}(z)$ y calculemos:

$$\|p \cdot z(x) - z(x)\| \leqslant \int_H \|p(t,x)(\alpha_t(z)(x) - z(x))\| d\mu_H(t) + \\ + \| \left(\int_H p(t,x) d\mu_H(t) - b_l(x) \right) z(x)\| + \|b_l z(x) - z(x)\|$$

El integrando del primer término del miembro derecho es menor o igual que $\|p(t,x)\|\|\alpha_t(z) - z\| \leqslant \|p(t,x)\|\varepsilon$ (por la hipótesis *a)*), y por lo tanto dicho término es menor o igual que 4ε (hipótesis *b)*). Por la hipótesis *c)* el segundo término del miembro derecho es menor o igual que $\|z\|\varepsilon' \leqslant \|z\|\varepsilon$, y por la construcción el último término es menor que ε. Hemos probado que $\|e \cdot z - z\| < \varepsilon(5 + \|z\|)$, con lo que terminamos la prueba de la parte *b)*.

Para probar que la red $p_{(T,U,l,\varepsilon)}$ satisface a) de la tesis de 3.1.19, fijemos $\varepsilon > 0$ y $b \in E_H$. Por la definición de E_H existen compactos $C_0 \subset H$ y $T_0 \subset X/K$ tales que $b(t,x) = 0$ si $(t, Kx) \notin C_0 \times T_0$. Dado el entorno compacto de $e \in H$, U_0, se tiene que $T_1 := U_0 \cdot T_0$ es compacto (2.1.23). Por 2.1.9 existe un compacto $D_1 \subset X$ tal que $KD_1 = T_1$.

Afirmación: Dado $\delta > 0$ existe un entorno (compacto) U_1 de $e \in H$, tal que $U_1 \subset U_0$, y si $t \in U_1$, entonces $\|\alpha_t(c(t^{-1}r, \cdot)) - c(r, \cdot)\| < \delta$, $\forall\, r \in H$.

Demostración. (De la afirmación.) Si la tesis no se cumple existen una red $\{t_i\}_i \subset U_0$ convergente a la identidad, un $\delta > 0$ y dos redes $\{r_i\}_i \subset H$, $\{x_i\}_i \subset X$, tales que $\|\alpha_{t_i}(c(t_i^{-1}r_i, t_i^{-1}x_i)) - c(r_i, x_i)\| \geqslant \delta$. Entonces para cada i se tiene que, o bien $c(r_i, x_i) \neq 0 \;\Rightarrow\; (r_i, Kx_i) \in C_0 \times T_0$, o bien $\alpha_{t_i}(c(t_i^{-1}r_i, t_i^{-1}x_i)) \neq 0 \;\Rightarrow\; (t_i^{-1}r_i, t_i^{-1}x_i) \in C_0 \times T_0$. Ambos casos implican que $(r_i, Kx_i) \in U_0C_0 \times T_1$. Cambiando x_i por otro elemento en su órbita en caso necesario, podemos suponer que $\{x_i\}_i \subset D_1$; además tomando una subred podemos suponer que $r_i \to r$ y $x_i \to x$. En ese caso, tomando límite en i contradecimos la suposición $\|\alpha_{t_i}(c(t_i^{-1}r_i, t_i^{-1}x_i)) - c(r_i, x_i)\| \geqslant \delta\ \forall\, i$. □

Sea U_1 el compacto dado por la afirmación al considerar $\delta = \varepsilon$. Usando que $\{r \in H : \ b(r, \cdot) \neq 0\}$ es pre-compacto, se deduce que existe $l_0 \in L$ tal que si $l \geqslant l_0$, entonces $\|b_l c(r, \cdot) - c(r, \cdot)\| < \varepsilon \ \forall r \in H$.

Ahora tomemos $(T, U, l, \varepsilon') \geqslant (T_1, U_1, l_1, \varepsilon)$, y $p = p_{(T,U,l,\varepsilon')}$. Si $p * b(t, x) \neq 0$, entonces existe $s \in H$ tal que $p(s, x)\alpha_s(b(s^{-1}t, s^{-1} \cdot x)) \neq 0$; luego $s \in U \subset U_1, \ s^{-1}t \in C_0, \ Ks^{-1} \cdot x \in T_0$, lo que implica que $Kx \in s \cdot T_0 \subset T_1$, y $t \in U_0 C_0 =: C_1$. Por lo tanto $\mathrm{sop}(p * b) \subset C_1 \times HD_1$, notar que $\mathrm{sop}(b) \subset C_1 \times HD_1$ y que C_1 y D_1 no dependen de (T, U, l, ε').

Ahora tomemos $(t, x) \in C_1 \times D_1$ y calculemos:

$$\begin{aligned}\|p * b(t, x) - b(t, x)\| \leqslant & \int_H \|p(r, x)\| \|\alpha_r(b(r^{-1}t, \cdot)) - c(t, \cdot)\| d\mu_H(r) + \\ & + \| \int_H p(r, x) d\mu_H(r) - b_l(x)\| \|c(t, x)\| + \|b_l(x)b(t, x) - b(t, x)\|\end{aligned}$$

Para acotar el primer sumando del miembro derecho notamos que el integrando es mayorado por $\|p(r, x)\|\varepsilon$; luego por la hipótesis *b)* este sumando es menor o igual que 4ε. El segundo sumando está acotado superiormente por $\|c\|_\infty \varepsilon' < \|c\|_\infty \varepsilon$. Finalmente el último sumando es menor o igual que ε. Con esto probamos que $\sup\{\|p * b(t, x) - b(t, x)\| : \ (t, x) \in C_1 \times D_1\} \leqslant (5 + \|c\|_\infty)\varepsilon$. Esto es suficiente debido a 3.1.17. $\square$

Corolario 3.1.23. *Si $\{\widehat{p}_m\}_m$ es una red en las hipótesis de la proposición anterior (m es una 4−upla) entonces la red $\{p_m\}_m$, donde $p_m(t, x) = \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} \widehat{p}_m(t, x)$, también satisface la tesis del resultado mencionado.*

Demostración. Definiendo $f_m := \widehat{p}_m - p_m$ para todo m, basta con probar que dados $z \in Z$ y $b \in E_H$ tenemos que $f_m \cdot z \to 0$ fuertemente en el límite inductivo, y que $f_m * b \to 0$ fuertemente.

Respecto a lo primero, dado $\varepsilon > 0$ tomemos un entorno compacto de $e \in H$, U_0, tal que si $t \in U_0 \ \Rightarrow \ |1 - \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}| < \varepsilon$. Definimos $T_0 := KU_0 \cdot \mathrm{sop}(z)$ y elegimos cualquier $l_0 \in L$. Si $m = (T, U, l, \varepsilon') \geqslant (T_0, U_0, l_0, \varepsilon)$ observamos que si $f_m \cdot z(x) \neq 0$, entonces existe $t \in U \subset U_0$ tal que $t^{-1} \cdot x \in \mathrm{sop}(z)$, y entonces $\mathrm{sop}(f_m \cdot b) \subset U_0 \cdot \mathrm{sop}(z)$. Además si $x \in U_0 \cdot \mathrm{sop}(z)$:

$$\begin{aligned}\|f_m \cdot z(x)\| &= \| \int_H (1 - \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}) \widehat{p}_m(t, x) \alpha_t(z)(x) d\mu(t)\| \\ &\leqslant \int_U |1 - \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}| \|\widehat{p}_m(t, x)\| \|z\| d\mu_H(t) \leqslant \int_U \varepsilon \|\widehat{p}_m(t, x)\| \|z\| d\mu(t) \\ &\leqslant 4\|z\|\varepsilon,\end{aligned}$$

lo cual prueba lo que queríamos.

En cuanto a la otra afirmación, tomemos $b \in E_H$ y $C \subset H$, $D \subset X$ compactos tales que $\mathrm{sop}(b) \subset C \times KD$. Para un $\varepsilon > 0$ elegimos U_0 como en la prueba de la primera afirmación. Si $m = (T, U, l, \varepsilon')$ es tal que $U \subset U_0$, $K(U_0 \cdot D) \subset T$ y $\varepsilon' < \varepsilon$, observamos que si $f_m * b(t, x) \neq 0$

entonces existe $r \in U$ tal que $r^{-1}t \in C,\ r^{-1} \cdot x \in D$, y por lo tanto $\text{sop}(f_m * b) \subset U_0 C \times K(U_0 \cdot D)$. Además, si $(t,x) \in U_0 C \times (U_0 \cdot D)$:

$$\|f_m * b(t,x)\| \leqslant \int_H |1 - \Delta_H(r)^{-\frac{1}{2}}| \|\widehat{p}_m(r,x)\| \|c\|_\infty d\mu_H(r) \leqslant \varepsilon 4 \|c\|_\infty$$

De esto deducimos que $\sup\{\|f_m * b(t,x)\| :\ (t,x) \in U_0 C \times (U_0 \cdot D)\} \leqslant \varepsilon 4 \|c\|_\infty$. □

Ahora nos ocuparemos de demostrar la proposición 3.1.19.

Demostración. De acuerdo al corolario anterior basta con construir una red $\{p_m\}_m$ que cumpla la condición c de 3.1.19 y que además la red $\{\widetilde{p}_m\}_m$, donde $\widetilde{p}_m(t,x) = \Delta_H(t)^{\frac{1}{2}} p_m(t,x)$, satisfaga las hipótesis de la Proposición 3.1.22.

Sea $\{b_l\}_{l \in L} \subset Ind^K(\mathfrak{B}, \beta)$ una unidad aproximada. Fijemos un compacto $T \subset X/K$, un entorno precompacto de $e \in H$, U, un $l \in L$ y un $\varepsilon > 0$. Tomemos un número positivo $\delta < \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{1}{2}\}$. Por 2.1.9 existe un compacto $D \subset X$ tal que $KD = T$. Tomemos un compacto C que contiene a D en su interior, y $\psi \in C_c(X)^+$ tal que $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ y $\psi|_C = 1$.

Por otro lado, como $b_l \geqslant 0$, tenemos una única raíz cuadrada positiva de b_l, a la cual llamamos a. Sea $z := \psi a$, es decir $z(x) = \psi(x) a(x)$. Observar que si $x \in C$ entonces $z(x)^2 = a(x)^2 = b_l(x)$. Además dado $\delta' > 0$ existe un entorno, W, de $e \in H$, contenido en U, tal que si $(t,x) \in W \times C \ \Rightarrow\ \|z(x)\alpha_t(z)(x) - b_l(x)\| < \delta'$. En efecto, por 3.1.2 existe un W entorno de e, $W \subset U$, tal que si $t \in W$ entonces $\|z\alpha_t(z) - z^2\| < \delta'$. Usando la desigualdad triangular es fácil deducir lo que afirmamos. Tomamos el W que corresponde a $\delta' = \delta$.

Como la acción de H en X es propia y libre, para todo $x \in D$ existe un entorno V_x de x tal que $\{t \in H :\ t \cdot V_x \cap V_x \neq \emptyset\} \subset W$ y $V_x \subset C$. Como D es compacto existes $x_1, \ldots, x_n \in D$ tales que $D \subset V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Por el lema de partición de la unidad existen $h_1, \ldots, h_n \in C_c(X)^+$ tales que $\text{sop}(h_i) \subset V_{x_i}$, $\sum_{i=1}^n h_i(x) = 1$ si $x \in D$ y $\sum_{i=1}^n h_i(x) \leqslant 1$ si $x \notin D$. Definimos $R(x) := \sum_{i=1}^n \int_K h_i(s^{-1} : x) d\mu_K(s)$. Usando el lema 3.1.13 (con el fibrado trivial $X \times \mathbb{C}$) se prueba que R es continua y constante en las K-órbitas. Además si $x \in D$, $R(x) > 0$. Como D es compacto $m := \text{mín}_{x \in D} R(x) > 0$. Luego la función $S := \text{máx}\{R, \frac{m}{2}\}$ es continua y no se anula.

Ahora definamos $k_i := \frac{h_i}{S}$, de modo que $k_i \in C_c(X)^+$, $\text{sop}(k_i) \subset V_{x_i}$ y

$$\sum_{i=1}^n \int_K k_i(s^{-1} \cdot x) d\mu_K(s) = \frac{R(x)}{S(x)} \begin{cases} = 1 \text{ si } x \in KD, \\ \leqslant 1 \text{ si } x \notin KD. \end{cases}$$

Por el lema 2.1.14, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $g_i \in C_c(X)^+$ tal que $\text{sop}(g_i) \subset \text{sop}(k_i)$, y

$$\left| k_i(x) - g_i(x) \int_H g_i(t^{-1} \cdot x) d\mu_H(t) \right| < \frac{\delta}{n \mu_H(C)}.$$

Como $\cup_i V_{x_i} \subset C$, si $x \in C$:

$$\left|\int_K\int_H g_i(s^{-1}:x)g_i(t^{-1}\cdot s^{-1}:x)d\mu_H(t)d\mu_K(s)-\int_K k_i(s^{-1}:x)d\mu_K(s)\right|\leqslant\frac{\delta}{n}. \tag{3.1}$$

Pero, por la invariancia a izquierda de la medida μ_K, la desigualdad anterior vale para todo $x\in K\cdot C$. Por otra parte, si $x\notin K\cdot C$, entonces $g_i(s^{-1}:x)=0=k_i(s^{-1}:x)$ para todo $s\in K$ e $i=1,\dots,n$. Por lo tanto 3.1 vale para todo $x\in X$.

Definimos $F:H\times X\to\mathbb{R}$ tal que $F(t,x):=\sum_{i=1}^n g_i(x)g_i(t^{-1}\cdot x)$. Tenemos que $F(t,x)=0$ si $(t,x)\notin W\times C$. Usando 3.1 se deduce que para todo $x\in X$:

$$\left|\int_K\int_H F(t,s^{-1}:x)\mu_H(t)d\mu_K(s)-\sum_{i=1}^n\int_K k_i(s^{-1}:x)d\mu_K(s)\right|\leqslant\delta$$

En particular si $Kx\in D$:

$$\left|\int_K\int_H F(t,s^{-1}:x)\mu_H(t)d\mu_K(s)-1\right|\leqslant\delta,$$

de donde se deduce, usando que $F\geqslant 0$:

$$0\leqslant\int_K\int_H F(t,s^{-1}:x)\mu_H(t)d\mu_K(s)\leqslant 2.$$

Definamos $f_i:=g_iz$, que es un elemento de Z. Sea ahora $p:=\sum_{i=1}^n {}_{E_H}\langle f_i,f_i\rangle$. Calculemos:

$$\begin{aligned}p(t,x)&=\sum_{i=1}^n {}_{E_H}\langle f_i,f_i\rangle(t,x)=\sum_{i=1}^n\Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}\int_K\beta_s(f_i\alpha_t(f_i^*))(x)d\mu_K(s)\\&=\sum_{i=1}^n\Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}\int_K\beta_s(g_i(s^{-1}:x)z(s^{-1}:x)g_i(s^{-1}:t^{-1}\cdot x)\alpha_t(z(t^{-1}\cdot s^{-1}:x)))d\mu_K(s)\\&=\Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}\int_K F(t,s^{-1}:x)\beta_s(z\alpha_t(z))(x)d\mu_K(s).\end{aligned}$$

Luego

$$\widehat{p}(t,x)=\int_K F(t,s^{-1}:x)\beta_s(z\alpha_t(z))(x)d\mu_K(s).$$

Veamos que $\widehat{p}$ verifica la propiedad *a)* de 3.1.22. Si $\widehat{p}(t,x)\neq 0$, entonces $F(t,s^{-1}:x)\neq 0$ para algún $s\in K$, y por la construcción tiene que ser $t\in W\subset U$.

Para la propiedad *b)* tomamos $x\in T=KD$. Si $t\in W$ entonces

$$\begin{aligned}\|\beta_s(z\alpha_t(z))(x)\|&=\|z(s^{-1}:x)\alpha_t(z(t^{-1}\cdot s^{-1}:x))\|\\&\leqslant\|z(s^{-1}:x)\alpha_t(z(t^{-1}\cdot s^{-1}:x))-b_l(s^{-1}:x)\|+1\leqslant\delta+1<2;\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_H \|\widehat{e}(t,x)\| d\mu_H(t) &\leqslant \int_H \int_K F(t, s^{-1} : x) \|\beta_s(z\alpha_t(z))(x)\| d\mu_K(s) d\mu_H(t) \\
&\leqslant \int_H \int_K F(t, s^{-1} : x) 2 d\mu_K(s) d\mu_H(t) \leqslant 4.
\end{aligned}
$$

Finalmente probemos la propiedad *c)*. Si $(t,x) \in W \times KD$:

$$
\|\beta_s(z\alpha_t(z) - b_l)(x)\| = \|z\alpha_t(z)(s^{-1} : x) - b_l(s^{-1} : x)\| \leqslant \delta
$$

Por lo tanto, dado $x \in KD$, para cualesquiera $s \in K$, $t \in H$ se cumple que:

$$
F(t, s^{-1} : x) \|\beta_s(z\alpha_t(z) - b_l)(x)\| \leqslant F(t, s^{-1} : x)\delta.
$$

Recordando que $\beta_s(b_l) = b_l$ para todo $s \in K$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_H \widehat{p}(t,x) d\mu_H(t) - b_l(x) \right\| &= \left\| \int_H \int_K F(t, s^{-1} : x) \beta_s(z\alpha_t(z))(x) d\mu_K(s) d\mu_H(t) - b_l(x) \right\| \\
&\leqslant \left\| \int_H \int_K F(t, s^{-1} : x) \beta_s(z\alpha_t(z) - b_l)(x) d\mu_K(s) d\mu_H(t) \right\| + \\
&\qquad + \left| \int_H \int_K F(t, s^{-1} : x) d\mu_K(s) d\mu_H(t) - 1 \right| \|b_l\| \\
&\leqslant 3\delta < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

3.1.2. Demostración del teorema de imprimitividad para acciones globales.

Operaciones de módulo

Veamos que con las operaciones que se definieron en la sección 3.1.1 tenemos que $Z(= C_c(\mathfrak{B}))$ es un $E_H - E_K-$bimódulo. Es fácil ver que la función $E_H \times Z \to Z$ tal que $(b, f) \mapsto b \cdot f$ es lineal en ambas variables, debido a la linealidad de la integral. Por otro lado, si $b, b' \in E_H$ y $f \in Z$, probemos que $(b * b') \cdot f = b \cdot b' \cdot f$. Verificamos la igualdad de las funciones en cada punto $x \in X$:

$$
\begin{aligned}
(b*b') \cdot f(x) &= \int_H (b * b')(t,x) \alpha_t(f)(x) \Delta_H(t)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(t) \\
&= \int_H \int_H b(r,x) \alpha_r(b'(r^{-1}t, r^{-1} \cdot x)) d\mu_H(r) \Delta_H(t)^{\frac{1}{2}} \alpha_t(f(t^{-1} \cdot x)) d\mu_H(t) \\
&= \int_H b(r,x) \int_H \alpha_r(b'(r^{-1}t, r^{-1} \cdot x)) \alpha_t(f(t^{-1} \cdot x)) \Delta_H(t)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(t) d\mu_H(r) \\
&= \int_H b(r,x) \int_H \alpha_r(b'(r^{-1}t, r^{-1} \cdot x) \alpha_{r^{-1}t}(f(t^{-1} \cdot x))) \Delta_H(r^{-1}t)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(t) \Delta_H(r)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(r) \\
&= \int_H b(r,x) \alpha_r \left(\int_H b'(r^{-1}t, r^{-1} \cdot x) \alpha_{r^{-1}t}(f(t^{-1} \cdot x)) \Delta_H(r^{-1}t)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(t) \right) \Delta_H(r)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b * b) \cdot f(x) &= \int_H b(r,x)\alpha_r\left(b' \cdot f(r^{-1}\cdot x)\right)\Delta_H(r)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(r) \\
&= b \cdot b' \cdot f(x).
\end{aligned}
$$

Justificación de las igualdades: La primera es trivial. En la segunda se usó la expresión del producto $*$ para los elementos de E_H. En la tercera se hicieron varias operaciones, a saber: la integral respecto de r es sobre un compacto y es en la fibra sobre x; el elemento $\alpha_t(f(t^{-1}\cdot x))$ está en la fibra indicada, y como la multiplicación es continua respecto a la topología con respecto a la cual se integra, se puede "pasar para adentro" el término $\alpha_t(f(t^{-1}\cdot x))$. Una vez que se tiene la integral doble se observa que la función que se integra respecto de t, r tiene soporte compacto en $H \times H$ (la integral es en la fibra sobre x) y por lo tanto se puede cambiar el orden de la integración, y luego justificando como antes se puede "sacar" $b(r,x)$. En la cuarta igualdad se usa que α actúa en $\mathcal{B}$, y en la quinta que la restricción de α_r a la fibra sobre $r^{-1}\cdot x$ es lineal y acotada. En la sexta se usa que la medida de Haar de H es invariante a izquierda. Finalmente, la última igualdad es inmediata.

Para ver la misma propiedad para la acción de E_K usamos el Lema 3.1.15 y lo que acabamos de probar, pero con los roles de H, K invertidos.

$$
f \cdot (c * c') = ((c * c')^* : f^*)^* = ((c'^* : c^*) : f^*)^* = (c'^* : (c^* : f^*))^* = (c^* : f^*)^* \cdot c' = (f \cdot c) \cdot c'.
$$

Ahora probemos que dadas $b \in E_H,\ c \in E_K$, y $f \in Z$, se cumple que $(b \cdot f) \cdot c = b \cdot (f \cdot c)$. Si $x \in X$:

$$
\begin{aligned}
(b \cdot f) \cdot c &= \int_K \beta_s(b \cdot f(\cdot)c(s^{-1},\cdot))\Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}}d\mu_K(s) \\
&= \int_K \beta_s\left(\int_H b(t,\cdot)\alpha_t(f)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(t)c(s^{-1},\cdot)\right)\Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}}d\mu_K(s) \\
&= \int_K\int_H \beta_s\left(b(t,\cdot)\alpha_t(f)c(s^{-1},\cdot)\right)\Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}}\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(t)d\mu_K(s) \\
&= \int_H\int_K \beta_s(b(t,\cdot))\alpha_t(\beta_s(f))\beta_s(c(s^{-1},\cdot))\Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}}\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_K(s)d\mu_H(t) \\
&= \int_H\int_K b(t,x)\alpha_t\left(\beta_s\left(fc(s^{-1},\cdot)\right)\right)\Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}}d\mu_K(s)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(t) \\
&= \int_H b(t,\cdot)\alpha_t\left(\int_K \beta_s\left(fc(s^{-1},\cdot)\right)\Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}}d\mu_K(s)\right)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(t) \\
&= \int_H b(t,\cdot)\alpha_t\left(f \cdot c\right)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(t) \\
&= b \cdot (f \cdot c)
\end{aligned}
$$

Justificación de las igualdades: las dos primeras igualdades son por definición, y en la tercera se usa que la multiplicación en $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$ es continua y que la acción β en $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha)$

es continua. En la cuarta igualdad hemos usado que, para cada $(t,s) \in H \times H$, la función $\beta_s\left(b(t,\cdot)\alpha_t(f)c(s^{-1},\cdot)\right)$ tiene soporte contenido en $t \cdot s : \mathrm{sop}(f)$; a su vez la integral puede restringirse a compactos en H y K, y por lo tanto la integral se ve como una integral en $C_D(\mathfrak{B})$, para cierto compacto $D \subset X$. Luego se usa el teorema de Fubini. En el resto de las igualdades se usan propiedades ya mencionadas, además de que las funciones de la forma $b(t,\cdot)$ son puntos fijos de β (lo mismo para $c(s,\cdot)$ y α), y además que las acciones de α y β conmutan.

Producto interno y operaciones de módulo

Usando la Proposición 3.12 de [9], para concluir la prueba basta con demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Z es un E_H-módulo a derecha y E_K-módulo a izquierda con pre-producto interno.

b) Los espacios generados por ${}_{E_H}\langle Z,Z\rangle$ y $\langle Z,Z\rangle_{E_K}$ son densos con la C^* norma en E_H y E_K respectivamente.

c) Las acciones de E_H y E_K son acotadas con respecto a los pre-productos internos. Es decir que $\langle b\cdot f, b\cdot f\rangle_{E_K} \leqslant \|b\|^2\langle f,f\rangle_{E_K}$ en $Ind^K(\mathfrak{B},\beta)\rtimes_\alpha H$ para cualesquiera $b\in E_H,\ f\in Z$. Lo mismo para el producto interno a derecha.

d) Para cada $f,g,h\in Z$ se tiene ${}_{E_H}\langle f,g\rangle\cdot h = f\cdot\langle g,h\rangle_{E_K}$.

Demostración de d).

$$
\begin{aligned}
{}_{E_H}\langle f,g\rangle\cdot h(x) &= \int_H \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}\int_K \beta_s(f\alpha_t(g^*))(x)d\mu_K(s)\alpha_t(h)(x)\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(t)\\
&= \int_H\int_K \beta_s(f\alpha_t(g^*)\beta_{s^{-1}}(\alpha_t(h)))(x)d\mu_K(s)d\mu_H(t)\\
&= \int_K\int_H \beta_s(f\alpha_t(g^*)\beta_{s^{-1}}(\alpha_t(h)))(x)d\mu_H(t)d\mu_K(s)\\
&= \int_K \beta_s(f)(x)\int_H \beta_s\left(\alpha_t(g^*)\beta_{s^{-1}}(\alpha_t(h))(s^{-1}:x)\right)d\mu_H(t)d\mu_K(s)\\
&= \int_K \beta_s(f)(x)\beta_s\left(\int_H \alpha_t(g^*\beta_{s^{-1}}(h))(s^{-1}:x)d\mu_H(t)\Delta_K(s^{-1})^{-\frac{1}{2}}\right)\Delta_K(s)^{\frac{1}{2}}d\mu_K(s)\\
&= \int_K \beta_s(f)(x)\beta_s\left(\langle g,h\rangle_{E_K}(s^{-1},s^{-1}:x)\right)\Delta_K(s)^{\frac{1}{2}}d\mu_K(s)\\
&= \int_K \beta_s\left(f\langle g,h\rangle_{E_K}(s^{-1},\cdot)\right)(x)\Delta_K(s)^{\frac{1}{2}}d\mu_K(s)\\
&= f\cdot\langle g,h\rangle_{E_K}(x).
\end{aligned}
$$

Justificación de las igualdades: la primera igualdad es inmediata. En la segunda la integral respecto de s se realiza en un compacto (porque la acción es propia) y se integra en la fibra sobre x, en cuya topología la multiplicación es continua; por lo tanto el término $\alpha_t(f)(x)$ puede "pasar para adentro". En la tercera igualdad usamos que la integral doble se realiza sobre el compacto $\{t \in H: \ t^{-1} \cdot x \in \text{sop}(h)\} \times \{s \in K: \ s^{-1} : x \in \text{sop}(h)\}$, y por lo tanto puede cambiarse el orden en que se hace la integral. En la cuarta igualdad se usa que la acción de K en $C_0(\mathfrak{B})$ conmuta con la evaluación y luego que la multiplicación es continua para "sacar" el término $\beta_s(f)(x)$. En la quinta igualdad usamos que la integral es sobre un compacto y que β_s es lineal y acotado si lo restringimos a la fibra sobre $s^{-1} : x$. La sexta igualdad es inmediata a partir de las definiciones de los productos internos. En la séptima usamos lo mismo que en la cuarta, y la última igualdad es inmediata.

Demostración de a). Las propiedades que debemos verificar respecto de Z y E_H son:

1. ${}_{E_H}\langle \ \cdot \ , \ \cdot \ \rangle$ es lineal en la primera variable.

2. $b * {}_{E_H}\langle f, g\rangle = {}_{E_H}\langle b \cdot f, g\rangle$.

3. ${}_{E_H}\langle f, g\rangle^* = {}_{E_H}\langle g, f\rangle$.

4. ${}_{E_H}\langle f, f\rangle \geqslant 0$ como elemento de $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes_\alpha H$.

Las propiedades que se deben verificar respecto de Z y E_K son las análogas a estas, las cuales se deducen fácilmente de las anteriores y el lema de simetría 3.1.15.

El primer ítem es inmediato a partir de la definición y la linealidad de la integral. Veamos el segundo:

$$
\begin{aligned}
b * {}_{E_H}\langle f, g\rangle(t, x) &= \int_H b(r, x)\alpha_r \left({}_{E_H}\langle f, g\rangle(r^{-1}t, r^{-1} \cdot x)\right) \Delta_H(r)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(r) \\
&= \int_H b(r, x)\alpha_r \left(\Delta_H(r^{-1}t)^{-\frac{1}{2}} \int_K \beta_s(f\alpha_{r^{-1}t}(g^*))(r^{-1} \cdot x) d\mu_K(s)\right) d\mu_H(r) \\
&= \int_H \int_K \Delta_H(r^{-1}t)^{-\frac{1}{2}} b(r, x)\alpha_r \left(\beta_s(f\alpha_{r^{-1}t}(g^*))(r^{-1} \cdot x)\right) d\mu_K(s) d\mu_H(r) \\
&= \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} \int_K \int_H b(r, x)\alpha_r \left(\beta_s(f\alpha_{r^{-1}t}(g^*))\right)(x)\Delta_H(r)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(r) d\mu_K(s) \\
&= \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} \int_K \int_H \beta_s(b(r, \cdot)\alpha_r(f))(x)\beta_s(\alpha_t(g^*))(x)\Delta_H(r)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(r) d\mu_K(s) \\
&= \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} \int_K \beta_s \left(\int_H (b(r, \cdot)\alpha_r(f)) (s^{-1} : x)\Delta_H(r)^{\frac{1}{2}} d\mu_H(r)\right) \beta_s(\alpha_t(g^*))(x) d\mu_K(s) \\
&= \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}} \int_K \beta_s(b \cdot f\alpha_t(g^*))(x) d\mu_K(s) \\
&= {}_{E_H}\langle b \cdot f, g\rangle(t, x)
\end{aligned}
$$

Justificación de las igualdades: las dos primeras son inmediatas. La tercera es consecuencia de que la integral en K es sobre un compacto y que α_r es lineal y acotado entre las fibras. En la cuarta igualdad vemos que el término superior es una integral doble sobre un compacto (porque las acciones son propias), y por lo tanto podemos cambiar el orden de integración; además se usa la definición de $\alpha_r(h)$ para $h \in C^b(\mathfrak{B})$, y que la función modular es un morfismo de grupos. En la siguiente igualdad usamos que $b(r,x)\alpha_r\left(\beta_s(f\alpha_{r^{-1}t}(g^*))\right) = \beta_s(b(r,\cdot)\alpha_r(f))(x)\beta_s(\alpha_t(g^*))$, puesto que $b(r,\cdot) \in Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$, y que α_r y β_s conmutan. En la sexta igualdad primero "sacamos" el término $\beta_s(\alpha_t(g^*))(x)$ justificando como lo hemos hecho en las ocasiones anteriores; después usamos que β_s es lineal y acotado en las fibras. El resto de las igualdades se deducen inmediatamente de las definiciones.

La propiedad 3. se verifica en una forma similar que las anteriores, incluso es más fácil.

$$\begin{aligned}
{}_{E_H}\langle f,g\rangle^*(t,x) &= \Delta_H(t)^{-1}\alpha_t({}_{E_H}\langle f,g\rangle(t^{-1},t^{-1}\cdot x)^*) \\
&= \Delta_H(t)^{-1}\alpha_t\left(\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}\int_K \beta_s(f\alpha_{t^{-1}}(g^*))(t^{-1}\cdot x)^* d\mu_K(s)\right) \\
&= \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}\alpha_t\left(\int_K \beta_s(\alpha_{t^{-1}}(g)f^*)(t^{-1}\cdot x) d\mu_K(s)\right) \\
&= \Delta_H(t)^{-\frac{1}{2}}\int_K \beta_s\left(g\alpha_t(f^*)\right)(x) d\mu_K(s) \\
&= {}_{E_H}\langle g,f\rangle(t,x)
\end{aligned}$$

Para probar la propiedad 4. usaremos la proposición 3.1.19. Primero cambiamos los roles de H y K. Tomemos la red $\{p_m\}_m \subset E_K$ dada por dicho resultado. Por el lema de simetría $f\cdot p_m^* = (p_m : f^*)^* \to f^{**} = f$, donde la convergencia es la fuerte en el límite inductivo. Además $p_m^* = \sum_{i=1}^{n_m} {}_{E_K}\langle f_i^m, f_i^m\rangle = \sum_{i=1}^{n_m}\langle (f_i^m)^*, (f_i^m)^*\rangle_{E_K}$. Notemos $g_i^m := (f_i^m)^*$. Ahora volvemos a la acción de E_H a izquierda y de E_K a derecha. Por 3.1.18, sabemos que ${}_{E_H}\langle f, f\cdot p_m\rangle \to {}_{E_H}\langle f,f\rangle$ en el límite inductivo y por lo tanto en la C^*-norma. Entonces basta con ver que ${}_{E_H}\langle f, f\cdot p_m\rangle$ es positivo para todo m. Dado un m, usando la parte d. y las propiedades 1. a 3. (que ya probamos):

$$\begin{aligned}
{}_{E_H}\langle f, f\cdot p_m^*\rangle &= \sum_{i=1}^{n_m} {}_{E_H}\langle f, f\cdot\langle g_i^m, g_i^m\rangle_{E_K}\rangle = \sum_{i=1}^{n_m} {}_{E_H}\langle f, {}_{E_H}\langle f, g_i^m\rangle\cdot g_i^m\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n_m} {}_{E_H}\langle f, g_i^m\rangle * {}_{E_H}\langle f, g_i^m\rangle^*
\end{aligned}$$

Claramente el último término es positivo en $Ind^K(\mathfrak{B},\beta)\rtimes_\alpha H$.

Demostración de b). Esto es sencillo si tomamos la red $\{p_m\}_m$ de la Proposición 3.1.19. Sabemos que dada $b \in Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$ se tiene que $p_m * b \to b$ en el límite inductivo, y por lo tanto los elementos de la forma $p_m * b$ son densos en la C^*-norma. Pero

$$p_m * b = \sum_{i=1}^{n_m} {}_{E_H}\langle f_i^m, f_i^m\rangle * b = \sum_{i=1}^{n_m} {}_{E_H}\langle f_i^m, b^* * f_i^m\rangle \in \operatorname{span}({}_{E_H}\langle Z, Z\rangle).$$

Con esto tenemos que ${}_{E_H}\langle Z, Z\rangle$ genera un espacio denso en $Ind^K(\mathfrak{B},\beta) \rtimes_\alpha H$. Invirtiendo los roles tenemos que ${}_{E_K}\langle Z, Z\rangle = \langle Z, Z\rangle_{E_K}$ genera un espacio denso en $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha) \rtimes K$ (por el Lema de simetría 3.1.15).

Demostración de c). Dado un elemento $a \in M(C^b(\mathfrak{B}))$ queremos pensar a como una función que a cada x le asocia un elemento de $M(\mathcal{B}_x)$. Consideremos la evaluación $ev_x : C^b(\mathfrak{B}) \to \mathcal{B}_x \subset M(\mathcal{B}_x)$; sea $\overline{ev_x} : M(C^b(\mathfrak{B})) \to M(\mathcal{B}_x)$ la extensión de ev_x. Definimos $a_x := \overline{ev_x}(a)$.

Ahora definimos $E := \{a \in M(C^b(\mathfrak{B})) : \ \overline{\beta_s}(a_{s^{-1}:x}) = a_x \ \forall \ (s,x) \in K \times X\}$. Veamos que E es una C^*-subálgebra unital de $M(C^b(\mathfrak{B}))$ que contiene a $Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$. Para ver que E es un sub-espacio vectorial cerrado observamos que $E = \cap\{\operatorname{Ker}(\overline{\beta_s} \circ \overline{ev_{s^{-1}:x}} - \overline{ev_x}) \ (s,x) \in K \times X\}$; con esto también se prueba que E es cerrado por *. Para probar que es cerrado por el producto se usa que $\overline{ev_x}$ y $\overline{\beta_s}$ son homomorfismos para cualesquiera $s \in K$, $x \in X$. Claramente E contiene a la identidad, y además si $a \in Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$, $(s,x) \in K \times X$: $\overline{\beta_s}(a_{s^{-1}:x}) = \beta_s(a(s^{-1}:x)) = a(x) = a_x$.

Por otro lado observamos que si $a \in M(C^b(\mathfrak{B}))$ y $f \in C_c(\mathfrak{B})$, entonces $af \in C_c(\mathfrak{B})$. En efecto, claramente $af \in C^b(\mathfrak{B})$, y además si $(af)(x) = a_x f(x) \neq 0$, entonces $f(x) \neq 0$, de donde $\operatorname{sop}(af) \subset \operatorname{sop}(f)$. Por otro lado observamos que si $g \in C_c(\mathfrak{B})$, entonces $(af)^*\beta_s(g) = f^*\beta_s(a^*g)$; en efecto:

$$\begin{aligned}(af)^*\beta_s(g)(x) &= f^*(x)a_x^*\beta_s(g(s^{-1}:x)) = f^*(x)\overline{\beta_s}(a_{s^{-1}:x}^*)\beta_s(g(s^{-1}:x)) \\ &= f^*(x)\beta_s((a^*g)(s^{-1}:x)) = f^*\beta_s(a^*g).\end{aligned}$$

Con esto tenemos que

$$\begin{aligned}\langle af, g\rangle_{E_K}(s,x) &= \Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} \int_H \alpha_t((af)^*\beta_s(g))(x)d\mu_H(s) \\ &= \Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} \int_H \alpha_t(f^*\beta_s(a^*g))(x)d\mu_H(s) \\ &= \langle f, a^*g\rangle_{E_K}(s,x).\end{aligned}$$

Hemos probado que $\langle af, g\rangle_{E_K} = \langle f, a^*g\rangle_{E_K}$. Ahora, si $a \in Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$ sabemos que existe $b \in E$ tal que $\|a\|^2 - a^*a = b^*b$, y por lo tanto:

$$\|a\|^2\langle f, f\rangle_{E_K} - \langle af, af\rangle_{E_K} = \langle(\|a\|^2 - a^*a)f, f\rangle_{E_K} = \langle b^*bf, f\rangle_{E_K} = \langle bf, bf\rangle_{E_K} \geqslant 0.$$

Llamemos Z_K al $Ind^H(\mathfrak{B},\alpha) \rtimes_\beta K-$módulo de Hilbert a derecha que se obtiene haciendo la completación de Hausdorff de Z con respecto al semi-producto interno $\langle \ \cdot \ , \ \cdot \ \rangle_{E_K}$, y sea $\iota : Z \to Z_K$ la correspondiente inclusión canónica. De acuerdo a lo que probamos antes tenemos una representación $M : Ind^K(\mathfrak{B},\beta) \to \mathfrak{L}(Z_K)$ tal que $M(a)(\iota(f)) = \iota(af)$. Por otra parte, para cada $t \in H$ definimos $U_t : Z \to Z$ mediante $U_t(f) = \Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}\alpha_t(f)$. Observamos que

$$\begin{aligned}\langle U_t(f), U_t(g)\rangle_{E_K}(s,x) &= \Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} \int_H \alpha_r\left(\alpha_t(f)^*\beta_s(\alpha_t(g))\right)(x)\Delta_H(t)d\mu_H(r)\\ &= \Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} \int_H \alpha_{rt}\left(f^*\beta_s(g)\right)(x)\Delta_H(t)d\mu_H(r)\\ &= \Delta_K(s)^{-\frac{1}{2}} \int_H \alpha_r\left(f^*\beta_s(g)\right)(x)d\mu_H(r)\\ &= \langle f, g\rangle_{E_K}(s,x).\end{aligned}$$

Esto nos permite definir un homomorfismo de grupos $V : H \to U\mathfrak{L}(Z_K)$ de manera que $V_t(\iota(f)) = \iota(U_t(f))$. Además sabemos que si la red $\{t_i\}_i \subset H$ converge a $t \in H$, entonces $\{U_{t_i}(f)\}_i$ converge fuertemente a $U_t(f)$ (usar el Lema 3.1.2 y observar qué pasa con los soportes). Con esto y la continuidad de los productos internos tenemos que $\lim_i \|U_{t_i}(f) - U_t(f)\|_{E_K} = 0$. Con esto deducimos que V es SOT-continua. También sabemos que si $\{b_l\}_l$ es una unidad aproximada de $Ind^K(\mathfrak{B},\beta)$ entonces $\lim_l b_l f = f$ fuertemente, con lo que probamos que $\lim_i \|b_l f - f\|_{E_K} = 0$ y con eso que M es no degenerada.

Probemos que (M,V) es un par covariante:

$$V_t M(a) V_{t^{-1}}(\iota(f)) = \iota(\alpha_t(a\alpha_{t^{-1}}(f))) = \iota(\alpha_t(a)f) = M(\alpha_t(a))\iota(f).$$

Esto nos permite construir la forma integrada (definición 1.2.21) $M \rtimes V : Ind^K(\mathfrak{B},\beta) \rtimes_\alpha H \to \mathfrak{L}(Z_K)$. Calculemos $M \rtimes V(b)$ para $b \in E_H$:

$$M \rtimes V(b)\iota(f) = \int_H \iota(b(t,\cdot)\alpha_t(f))\Delta_H(t)^{\frac{1}{2}}d\mu_H(t) = \iota\left(b \cdot f\right). \tag{3.2}$$

Para justificar la última igualdad, de acuerdo a 3.1.14, debemos demostrar que ι es continua en la topología del límite inductivo. Para ver esto fijamos un compacto de $D \subset X$ y restringimos la función ι a $C_D(\mathfrak{B})$. Observar que si $g \in C_D(\mathfrak{B})$, entonces $\|\langle g,g\rangle_{E_K}\| \leqslant \|\langle g,g\rangle_{E_K}\|_1$. De la fórmula de $\langle g,g\rangle_{E_K}$ se deduce que si $\langle g,g\rangle_{E_K}(s,x) \neq 0$, entonces existe $r \in H$ tal que $r^{-1}\cdot x \in \mathrm{sop}(g) \subset D$, y $s^{-1} : r^{-1}\cdot x \in \mathrm{sop}(g) \subset D$. Como la acción es propia y libre, s está en el compacto $G_D^K := \{t \in K : D \cap t : D \neq \emptyset\}^{-1}$. Por otra parte tiene que ser $Hx \in HD$, y como además $\langle g,g\rangle_{E_K}$ respeta las $\alpha-$órbitas, se tiene que:

$$\begin{aligned}\|\langle g,g\rangle_{E_K}\|_1 &\leqslant \mu(G_D^K)\sup\{\|\langle g,g\rangle_{E_K}(s,x)\| :\ (s,x) \in G_D \times D\}\\ &\leqslant \mu_K(G_D^K)\sup\{\Delta_K(s)^{\frac{1}{2}} :\ s \in G_D^K\} \sup_{(s,x)\in G_D^K\times D} \int_{G_D^H} \|\alpha_t(g^*\beta_s(g))(x)\|d\mu_H(t)\\ &\leqslant \mu_K(G_D^K)\sup\{\Delta_K(s)^{\frac{1}{2}} :\ s \in G_D^K\}\mu_H(G_D^H)\|g\|^2.\end{aligned}$$

Esto concluye la justificación de la última igualdad de las ecuaciones 3.2.

Por otra parte sabemos que dado $T \in \mathfrak{L}(Z_K)$ y $f \in Z$ se tiene que $\langle T(\iota(f)), T(\iota(f))\rangle \leqslant \|T\|^2 \langle \iota(f), \iota(f)\rangle$. En particular, si $T = M \rtimes V(b)$, deducimos que

$$\langle b \cdot f, b \cdot f\rangle_{E_K} = \langle M \rtimes V(b)\iota(f), M \rtimes V(b)\iota(f)\rangle \leqslant \|b\|^2 \langle \iota(f), \iota(f)\rangle = \|b\|^2 \langle f, f\rangle_{E_K}.$$

Con esto probamos que $\langle b \cdot f, b \cdot f\rangle_{E_K} \leqslant \|b\|^2 \langle f, f\rangle_{E_K}$ para cualesquiera $b \in Ind^K(\mathfrak{B}, \beta)$, $f \in Z$. Para concluir la prueba apelamos al Lema de simetría.

3.2. El caso general

Ahora daremos una prueba del Teorema 3.0.7 en toda su generalidad, es decir, para acciones parciales. Comenzamos por demostrar un resultado que contiene la idea básica de la demostración.

Observación 3.2.1. Supongamos que α es una acción global del grupo H en el fibrado $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$. Dado un abierto $U \subset X$, queremos definir la restricción de α a $\mathfrak{B}_U := (\mathcal{B}_U, U, \pi_U)$ (construcción 2.2.2). Restringimos las acciones de α a U y a $\mathcal{B}_U$; como sabemos, obtenemos acciones parciales y la acción en las fibras es por isomorfismos.

Por otro lado

$$\begin{aligned}\pi_U^{-1}(U_t) &= \pi_U^{-1}(U \cap t \cdot U) = \pi^{-1}(U \cap t \cdot U) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(t \cdot U) = \pi^{-1}(U) \cap \alpha_t(\pi^{-1}(U)) \\ &= \mathcal{B}_U \cap \alpha_t(\mathcal{B}_U) = (\mathcal{B}_U)_t.\end{aligned}$$

Además, si $b \in \mathcal{B}_U \cap \alpha_t(\mathcal{B}_U)$ tenemos que $\pi_U(\alpha_t(b)) = \pi(\alpha_t(b)) = t \cdot \pi(b) = t \cdot \pi_U(b)$.

Por lo tanto, la restricción de α a $\mathfrak{B}_U$ es una acción parcial en $\mathfrak{B}_U$, a la cual llamamos α_U.

Afirmación 3.2.2. *En las condiciones de la Observación anterior, si la órbita de U es X, es decir $X = HU = \bigcup\{t \cdot U : \ t \in H\}$, entonces para cada abierto $Y \subset U$ el mapa restricción $r : Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha, Y) \to Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U, Y)$ es un isomorfismo de C^*-álgebras.*

Demostración. Primero debemos probar que $r(Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha, Y)) \subset Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U, Y)$. Si $f \in Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha, Y)$ es inmediato que $r(f)$ respeta las α_U-órbitas. Además, como la órbita de U es X, tenemos que los espacios de órbitas X/H y U/H son homeomorfos, mediante la función $h : U/H \to X/H$ dada por $Hx \mapsto Hx$ (la primera órbita es con respecto a la acción parcial y la segunda con respecto a la acción global). La función $U/H \to \mathbb{R}$ tal que $Hx \mapsto \|r(f)(x)\|$ es la composición de h con $X/H \to \mathbb{R}$ tal que $Hx \mapsto \|f(x)\|$. Además $h(HY) = HY$, con lo que probamos $r(f) \in Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U, Y)$.

Claramente, r es un morfismo de C^*-álgebras. Veamos que es biyectivo. Para ver que es inyectivo tomamos f tal que $r(f) = 0$; si $x \in X$, existe $t \in H$ tal que $t \cdot x \in U$, de donde $\|f(x)\| = \|\alpha_t(f(x))\| = \|f(t \cdot x)\| = \|r(f)(t \cdot x)\| = 0$, y por lo tanto $f = 0$.

En cuanto a la sobreyectividad, tomamos $g \in Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U, Y)$; dados $x \in U$, $t \in H$ queremos definir $f(t \cdot x) := \alpha_t(g(x))$. Para poder hacer esto debemos probar que si $t \cdot x = s \cdot y$ con $x, y \in U$, $s, t \in H$, entonces $\alpha_t(g(x)) = \alpha_s(g(y))$ o, lo que es equivalente: $g(x) = \alpha_{t^{-1}s}(g(y))$. Notamos que $x = t^{-1}s \cdot y$, de modo que $y \in U \cap s^{-1}t \cdot U$, y entonces $g(x) = g(t^{-1}s \cdot y) = (\alpha_U)_{t^{-1}s}(g(y)) = \alpha_{t^{-1}s}(g(y))$. Tenemos definida entonces $f : X \to \mathcal{B}$.

Observar que si $x \in U$, $\pi(f(t \cdot x)) = \pi(\alpha_t(g(x))) = t \cdot \pi(g(x)) = t \cdot x$, y por lo tanto f es una sección. Para ver que es continua, tomemos $z \in X$; sabemos que existe $t \in H$ tal que $t \cdot z \in U$. Luego, en el entorno $t^{-1} \cdot U$ de z la función f coincide con $w \mapsto \alpha_{t^{-1}}(g(t \cdot w))$, que es continua.

Para ver que f respeta las α-órbitas tomemos $z \in X$ y $t \in H$, y sean $r, s \in H$ tales que $s \cdot z \in U$ y $r \cdot t \cdot z \in U$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(t \cdot z) &= \alpha_{r^{-1}}(g(r \cdot t \cdot s^{-1} \cdot s \cdot z)) = \alpha_{r^{-1}}(g(rts^{-1} \cdot s \cdot z)) = \alpha_{r^{-1}}(\alpha_U)_{rts^{-1}}(g(s \cdot z)) \\ &= \alpha_{r^{-1}}\alpha_{rts^{-1}}(g(x)) = \alpha_t \alpha_{s^{-1}}(g(s \cdot z)) = \alpha_t(f(z)). \end{aligned}$$

Finalmente, para ver que $X/H \to \mathbb{R}$ tal que $Hx \mapsto \|f(x)\|$ está en $C_0(HY)$, observemos que esta función es la composición de h^{-1} con la función $Hx \mapsto \|g(x)\|$. Es inmediato que $r(f) = g$. $\square$

Definición 3.2.3. Dadas dos acciones globales de grupos H y K en un espacio X, si $U \subset X$, decimos que las acciones *conmutan en* U si

$$U \cap s : U \cap s : t \cdot U = U \cap t \cdot U \cap t \cdot s : U,$$

para todo $t \in H,\ s \in K$, y además si $x \in U \cap t^{-1} \cdot U \cap t^{-1} \cdot s^{-1} : U$, entonces $s : t \cdot x = t \cdot s : x$ para cualesquiera $t \in H,\ s \in K$.

Dos acciones en un fibrado de C^*-álgebras conmutan en el abierto U del espacio de base, si las acciones en el espacio de base conmutan en U y las acciones en el espacio total conmutan en $\pi^{-1}(U)$.

Observación 3.2.4. Dadas dos acciones en un fibrado de C^*-álgebras, y un abierto en el espacio de base, las acciones conmutan en el abierto si y solamente si sus restricciones en el sentido de 3.2.1 conmutan como acciones parciales.

Lema 3.2.5. *Sean α y β acciones globales de los grupos HLC H y K en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$. Supongamos que las acciones conmutan en X y en un abierto $U \subset X$ tal que $X = \cup\{s : t \cdot U :\ (t, s) \in H \times K\}$, y que además la acción de H es propia. Si definimos $Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_s := Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U, U \cap s : U)$ para cada $s \in K$ y $(\beta_U)_s : Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_{s^{-1}} \to Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_s$ tal cual lo hicimos en 2.3.6, entonces $\beta_U := \big(\{(\beta_U)_s\}_{s \in K}, \{Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_s\}_{s \in K}\big)$ es un sistema dinámico parcial. Además $\beta : K \to Aut(Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ es el sistema envolvente de β_U.*

Demostración. Primero observamos que la restricción de α a cualquier abierto es propia. En efecto, supongamos que nos restringimos a $V \subset X$. Si $(x_i, t_i \cdot x_i) \to (x, y) \in V \times V$, como la acción de H es propia sabemos que t_i tiene una subred convergente, digamos $t_{i_j} \to t$. Tiene que ser $t \cdot x = y$, lo que lleva a $x \in V \cap t^{-1} \cdot V$. Por el lema 2.1.7 se deduce que $\alpha|_V$ es propia.

Luego, la restricción de α a U es propia y conmuta con la restricción de β a U. Si observamos las definiciones tenemos que $\big(\{(\beta_U)_s\}_{s\in K}, \{Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_s\}_{s\in K}\big)$ es exactamente el sistema dinámico obtenido de restringir las dos acciones a U, tal cual se definió en la Proposición 2.3.6.

Definamos $W := H \cdot U$. Observemos que α y β conmutan en W, pues W es invariante por la acción de α. En efecto,

$$W \cap t \cdot W \cap t \cdot s : W = W \cap t \cdot s : W = W \cap s : t \cdot W = W \cap s : W = W \cap s : W \cap s : t \cdot W.$$

Esto da lugar al sistema dinámico parcial $\big(\{(\beta_W)_s\}_{s\in K}, \{Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)_s\}_{s\in K}\big)$. De acuerdo a 3.2.2 el mapa $r : Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W) \to Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)$ es un isomorfismo. Además r lleva $Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)_s$ sobre $Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_s$. Para ver esto último recordamos que

$$Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)_s = Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W, W \cap s : W) \text{ y que}$$

$$Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_s = Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U, U \cap s : U),$$

de manera que basta con ver que $U \cap s : U = U \cap (W \cap s : W)$. Para esto primero observamos que $U \cap s : U$ es invariante por α_U y por lo tanto coincide con su órbita (en U). Además

$$\begin{aligned} U \cap W \cap s : W = U \cap s : W &= \bigcup_{t\in H} U \cap s : t \cdot U = \bigcup_{t\in H} U \cap t \cdot U \cap t \cdot s : U \\ &= \bigcup_{t\in H} t \cdot (t^{-1} \cdot U \cap U \cap s : U) = U \cap s : U. \end{aligned}$$

También observamos que r conjuga las acciones de β_U y β_W, y por lo tanto los sistemas dinámicos $\big(\{(\beta_W)_s\}_{s\in K}, \{Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)_s\}_{s\in K}\big)$ y $\big(\{(\beta_U)_s\}_{s\in K}, \{Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U)_s\}_{s\in K}\big)$ son el mismo a menos de isomorfismo.

Probaremos que $\beta : K \to Aut(Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha))$ es la acción envolvente de la restricción a W. Sea $I := Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha, W)$, veamos que I es isomorfo a $Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)$ mediante el mapa inclusión $\iota : Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W) \to I$, definiendo $\iota(f)(x) = f(x)$ si $x \in W$ y 0_x en otro caso. Antes que nada debemos mostrar que $\iota(f) \in I$; claramente $\iota(f)$ es acotada. Además, como W es invariante por la acción de H, tenemos que $\alpha_t(f(t^{-1} \cdot x)) = f(x), \forall\, t \in H,\ x \in X$. Lo anterior permite definir la función $X/H \to \mathbb{R}$ dada por $Hy \mapsto \|\iota(f)(y)\|$, la cual es la función que coincide[1] con la función dada por $Hy \mapsto \|f(y)\|$ si $Hy \in W/H$, y cero en otro caso; dicha función es un elemento de $C_0(X/H)$.

[1] A menos de identificar el espacio de órbitas de la acción parcial de H en W, con el abierto W/H en el espacio X/H.

Por último debemos probar que $\iota(f)$ es continua, lo que haremos localmente. Claramente es continua en W y en el interior de W^c, por eso basta con probar que dada una red, $\{x_i\}_i \subset W$, que converge a un punto $x \notin W$, se cumple que $\lim_i \|\iota(f)(x_i)\| = 0$ (recordar la definición 1.1.2). Notemos que la red $\{Hx_i\}_i \subset W/H$ tiende a infinito: en caso contrario, pasando a una subred si fuere necesario, podemos suponer que existe un compacto, $C \subset W/H$, que contiene a la red $\{Hx_i\}_i$. Pero C es cerrado (porque la acción es propia), y por lo tanto $Hx \in C \subset W/H$. Finalmente, como W es invariante por la acción de H, tendríamos que $x \in W$, lo que es absurdo. Usando lo que acabamos de probar, y que la función $Hy \mapsto \|f(y)\| = \|\iota(f)(y)\|$ se anula en infinito, deducimos que $\lim_i \|\iota(f)(x_i)\| = 0$.

Es claro que ι es inyectiva, y también es sobreyectiva pues es fácil probar que si $g \in I$ entonces $g|_W \in Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)$, y además $\iota(g|_W) = g$. Por otra parte, de la Afirmación 2.3.5: $\beta_s(I) \cap I = Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha, W) \cap Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha, s : W) = Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha, W \cap s : W)$, de modo que $\iota(Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)_s) = \beta_s(I) \cap I$ para todo $s \in K$. Finalmente, veamos que si $f \in Ind^H(\mathfrak{B}_W, \alpha_W)_{s^{-1}}$, entonces $\beta_s(\iota(f)) = \iota((\beta_W)_s(f))$: si $x \in W \cap s : W$, tenemos que

$$\beta_s(\iota(f))(x) = \beta_s(\iota(f)(s^{-1} : x)) = \beta_s(f(s^{-1} : x)) = (\beta_W)_s(f(s^{-1} : x)) = \iota((\beta_W)_s(f))(x).$$

Nos resta probar que $\bigcup_{s \in K} \beta_s(I)$ genera linealmente un sub-espacio denso de $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)$. En realidad como α es propia basta con ver que es denso en $Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha)$ (por la afirmación 2.3.3). Sea $f \in Ind_c^H(\mathfrak{B}, \alpha)$, y recordemos que f_H es la función $Hx \mapsto \|f(x)\|$. Para cada $z \in \mathrm{sop}(f_H)$ existen un $s_z \in K$ y un entorno compacto de z, V_z, tales que $s_z : V_z \subset W$. Como $\mathrm{sop}(f_H)$ es compacto, existen $z_1, \ldots, z_n \in \mathrm{sop}(f_H)$ tales que $\mathrm{sop}(f_H) \subset V_{z_1} \cup \cdots \cup V_{z_n}$. Sean $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C_c(X/H)^+$ tales que $\mathrm{sop}(\psi_i) \subset V_{z_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, $\sum_i \psi_i(z) = 1$ si $z \in \mathrm{sop}(f_H)$ y menor o igual a 1 en otro caso. Definamos $f_i(x) := \psi_i(Hx) f(x)$ y $s_i := s_{z_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Es inmediato que $f = f_1 + \cdots + f_n$.

Basta entonces con probar que $\beta_{s_i}(f_i) \in I$ para todo $i = 1, \ldots, n$, o, lo que es lo mismo, que si $x \notin W$ entonces $\|\beta_{s_i}(f_i)\| = 0$. Pero si $x \notin W$, $\|\beta_{s_i}(f_i)(x)\| = \psi_i(Hs_i^{-1} : x)\|f(s_i^{-1} : x)\| = \psi_i(s_i^{-1} : Hx)\|f(s_i^{-1} : x)\|$; si $\psi_i(s_i^{-1} : Hx) \neq 0$, entonces $s_i^{-1} : Hx \in V_{z_i} \Rightarrow Hx \in s_i : V_{z_i} \subset W$, y como W es H invariante tiene que ser $x \in W$, lo que es absurdo. $\square$

Teorema 3.2.6. *Sean α y β acciones globales de los grupos HLC H y K respectivamente en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$. Si las acciones son libres, propias, conmutan en X y en un abierto $U \subset X$ tal que $X = \cup\{t \cdot s : U : (t, s) \in H \times K\}$, entonces los productos cruzados $Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U) \rtimes_{\beta_U} K$ e $Ind^K(\mathfrak{B}_U, \beta_U) \rtimes_{\alpha_U} H$ son Morita-Rieffel equivalentes.*

Demostración. De acuerdo a 3.1, $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes_\beta K$ es Morita-Rieffel equivalente a $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes_\alpha H$. Por el lema anterior $Ind^H(\mathfrak{B}_U, \alpha_U) \rtimes_{\beta_U} K$ es Morita-Rieffel equivalente a $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes_\beta K$ (Teorema 1.4.13), con el mismo argumento $Ind^K(\mathfrak{B}_U, \beta_U) \rtimes_{\alpha_U} H$ es Morita-Rieffel equivalente a $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes_\alpha H$. El resultado se deduce de que la equivalencia de Morita-Rieffel es transitiva. $\square$

Estamos en condiciones de demostrar el teorema 3.0.7, que enunciamos nuevamente.

Teorema 3.2.7. *Sean α y β acciones parciales de H y K respectivamente (ambos HLC) en el fibrado de C^*-álgebras $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$. Si las acciones son libres, propias, conmutan y son continuas en ∞, entonces los productos cruzados $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes_\beta K$ e $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes_\alpha H$ son Morita-Rieffel equivalentes.*

Demostración. Consideremos en $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, X, \pi)$ la acción parcial μ del grupo producto $G = H \times K$. Como ambas acciones son propias y una de ellas es continua en ∞, la acción de G en el espacio de base tiene acción envolvente (por 2.1.26). Podemos considerar el fibrado envolvente de la acción de G en el sentido de 2.2.10. A ese fibrado lo llamaremos $\mathfrak{B}^e = (\mathcal{B}^e, X^e, \pi^e)$ y μ^e a la acción envolvente de μ.

Llamemos α^e a la restricción de μ^e a $H = H \times \{e_K\}$. Observar que α^e no necesariamente es la acción envolvente de α. Veamos que α^e es libre. Sean $x \in X$, $(r, s) \in K$, y $t \in H$ tales que $t \cdot (r, s)x = (r, s)x$, es decir que $(t, e)(r, s)x = (r, s)x$. Luego: $(r^{-1}tr, e)x = x$, pero eso implica que $x \in X^H_{r^{-1}t^{-1}r}$ y $r^{-1}tr \cdot x = x$. Como la acción de H es libre, tenemos que $r^{-1}tr = e$, es decir $t = e$.

Para ver que α^e es propia tomemos una red $\{(t_i, w_i)\}_i \subset H \times X^e$ tal que $(w_i, t_i \cdot w_i) \to (w, z) \in X^e \times X^e$. Sabemos que existen $(r, s), (h, k) \in H \times K$ tales que $(r, s)w \in X$ y $(h, k)z \in X$. A partir de cierto i_0 tenemos pues que $(r, s)w_i \in X$ y $(h, k)(t_i, e)(r, s)^{-1}((r, s)w_i) \in X$, es decir, a partir de un i_0 podemos suponer que $u_i := (r, s)w_i \in X^\mu_{(ht_ir^{-1}, ks^{-1})^{-1}}$ y que $(u_i, (ht_ir^{-1}, ks^{-1})u_i) \to (u, v) \in X \times X$. Pero $(ht_ir^{-1}, ks^{-1})u_i = ht_ir^{-1} \cdot ((ks^{-1}) : u_i)$. Como u_i converge a un punto de X, no puede ser que $(ks^{-1}) : u_i$ tienda a ∞ (porque la acción de K es continua en ∞). Por lo tanto tiene alguna subred convergente a un punto de X, a la que llamamos $\{u_{i_j}\}_j$. Ahora $((ks^{-1}) : u_{i_j}, ht_{i_j}r^{-1} \cdot (ks^{-1}) : u_{i_j}))$ converge a un punto de $X \times X$ y como la acción de α en el espacio de base es propia, existe una subred, $\{t_{i_{j_l}}\}_l$, de $\{t_{i_j}\}_j$ tal que $ht_{i_{j_l}}r^{-1}$ es convergente a cierto $p \in H$. Luego $t_{i_{j_l}} = h^{-1}ht_{i_{j_l}}r^{-1}r \to h^{-1}pr$. Con esto concluye la prueba de que α^e es propia.

Como la situación es simétrica respecto de H y K, también tenemos que β^e es libre y propia. Además α^e y β^e conmutan en X y en X^e, y $X^e = \bigcup\{(t, s)X : \ (t, s) \in H \times K\} = \bigcup\{t \cdot s : X : (t, s) \in H \times K\}$. Con esto, y el Teorema 3.2.6, tenemos que $Ind^H(\mathfrak{B}^e_X, \alpha^e_X) \rtimes_{\beta^e_X} K$ es Morita-Rieffel equivalente a $Ind^K(\mathfrak{B}^e_X, \beta^e_X) \rtimes_{\alpha^e_X} H$. Pero estos productos cruzados son $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes_\beta K$ e $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes_\alpha H$, respectivamente, porque los sistemas dinámicos son los mismos a menos de isomorfismo. $\square$

Capítulo 4

Casos particulares y ejemplos

4.1. Los Teoremas de Imprimitividad de Green y Raeburn

Supongamos que H es un grupo que actúa en el espacio X (ambos HLC) y en una C^*-álgebra A mediante acciones globales $\cdot$ y α respectivamente. Decimos que una función, $f \in C^b(X, A)$, respeta las órbitas si para cada $t \in H$ y cada $x \in X$ se cumple que $\alpha_t(f(x)) = f(t \cdot x)$. En este caso tenemos una función $X/H \to \mathbb{R}$, dada por $Hx \mapsto \|f(x)\|$. El teorema de Raeburn se enuncia en términos de la C^*-álgebra

$$Ind^H(X, A) := \{f \in C^b(X, A) : \ f \text{ respeta las órbitas y } Hx \mapsto \|f(x)\| \in C_0(X/H)\}.$$

Si consideramos el fibrado trivial $\mathfrak{B} := (A \times X, X, \pi)$ donde $\pi(a, x) = x$, como fibrado de C^*-álgebras, construimos una acción de H en $\mathfrak{B}$

$$\alpha : H \times (A \times X) \to A \times X \ \mid \ (t, a, x) \mapsto (\alpha_t(x), t \cdot x).$$

Es prácticamente inmediato verificar que hay un isomorfismo $\psi : Ind^H(X, A) \to Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)$ dado por:

$$\psi(f)(x) = (f(x), x) \ \forall \ x \in X.$$

Supongamos que tenemos otro grupo HLC K que también actúa globalmente en X y en A, mediante $:$ y β respectivamente, y que además las acciones de H y K en X son libres, propias y que las acciones en X y A conmutan. En este caso tenemos una acción continua de K en $Ind^H(X, A)$ dada por

$$\beta_s(f)(x) = \beta_s(f(s^{-1} : x)) \quad \forall \ f \in Ind^H(X, A), \ s \in K, \ x \in X.$$

Así como a la acción $\alpha : H \to Aut(A)$ le asociamos la acción α en $\mathfrak{B}$, a partir de $\beta : K \to Aut(A)$ construimos la acción β de K en $\mathfrak{B}$. Claramente las acciones en el fibrado conmutan, son libres y propias, y por lo tanto tenemos un C^*-sistema dinámico $\beta : K \to Aut(Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha))$. El isomorfismo ψ conjuga las acciones de K. Por lo tanto los sistemas en cuestión son isomorfos, lo que da un isomorfismo entre los sistemas dinámicos.

Teorema 4.1.1. ***(de Imprimitividad Simétrico de Raeburn.)*** *Sean H, K grupos HLC que actúan en el espacio HLC X y en la C^*-álgebra A (notación de 4.1). Si las acciones conmutan en X y en A, y las acciones en X son libres y propias, entonces los productos cruzados $Ind^H(X, A) \rtimes K$ y $Ind^K(X, A) \rtimes H$ son Morita-Rieffel equivalentes.*

Demostración. De acuerdo a las observaciones previas al teorema, $Ind^H(X, A) \rtimes K$ es isomorfo a $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes K$, en particular son Morita-Rieffel equivalentes. Lo mismo sucede con $Ind^K(X, A) \rtimes H$ e $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes H$. De acuerdo a 3.0.7 tenemos una equivalencia de Morita-Rieffel entre $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes K$ y $Ind^K(\mathfrak{B}, \beta) \rtimes H$, y entonces la tesis se deduce usando que esta relación es transitiva. □

Un caso particular e interesante del resultado anterior es el Teorema de Green. En éste suponemos que $A = \mathbb{C}$ y que los grupos actúan trivialmente en A. En este caso $Ind^H(X, A) = C_0(X/H)$ y la acción de K en $C_0(X/H)$ es la que se obtiene de la acción de K en X/H de acuerdo a 2.1.23.

Corolario 4.1.2. ***(Teorema Simétrico de Green.)*** *Sean H, K grupos HLC que actúan libre y propiamente en el espacio HLC X y las acciones conmutan. En este caso $C_0(X/H) \rtimes K$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(X/K) \rtimes H$.*

El teorema 3.0.7 ofrece una generalización del teorema anterior a acciones parciales. Consideremos dos acciones parciales de H y K en el espacio X (todos HLC). Supongamos además que las acciones conmutan, son libres, propias y continuas en ∞. Construimos el fibrado $\mathfrak{B} = (\mathbb{C} \times X, X, \pi)$, donde $\pi(\lambda, x) = x$. Claramente es un fibrado de C^*-álgebras. Para definir una acción parcial de H en $\mathfrak{B}$ consideramos $(\mathbb{C} \times X)^H_t := \mathbb{C} \times X^H_t = \pi^{-1}(X^H_t)$,

$$\alpha_t : \mathbb{C} \times X^H_{t^{-1}} \to \mathbb{C} \times X^H_t \quad (\lambda, x) \mapsto (\lambda, t \cdot x).$$

Con verificaciones de rutina concluimos que en $\mathfrak{B}$ tenemos acciones parciales α y β de H y K respectivamente, que además son propias, libres, continuas en ∞ y conmutan. Observamos que $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)$ es isomorfo a $C_0(X/H)$ mediante

$$\psi : C_0(X/H) \to Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \;\mid\; \psi(f)(x) = (f(Hx), x),\ \forall\, x \in X,\ f \in C_0(X/H).$$

Además ψ conjuga la acción de K en $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha)$ con la acción que define K en $C_0(X/H)$, y por lo tanto $C_0(X/H) \rtimes K$ es isomorfo a $Ind^H(\mathfrak{B}, \alpha) \rtimes K$. Tenemos entonces el siguiente resultado, que es la generalización del Teorema de Green para acciones parciales.

Teorema 4.1.3. *Si H, K son grupos HLC que actúan parcialmente en el espacio HLC X, y las acciones conmutan, son libres, propias y continuas en ∞, entonces $C_0(X/H) \rtimes K$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(X/K) \rtimes H$.*

Demostración. Inmediata a partir de las consideraciones previas al teorema, del Teorema 3.0.7 y de que la equivalencia de Morita-Rieffel es una relación transitiva. □

4.2. El teorema de Stone - Von Neumann

En lo que sigue consideraremos un grupo HLC G y llamaremos lt a la acción por multiplicación a izquierda $lt : G \times G \to G$, $lt_r(s) = rs$. Dado un abierto no vacío $U \subset G$, llamaremos lU a la restricción de lt a U, es decir que $U_t := U \cap tU$ y $lU_t(r) = tr \;\forall\; r \in U_t$. Como G es la órbita por lt de U sabemos (1.4.13) que $C_0(U) \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(G) \rtimes_{lt} G$.

Afirmación 4.2.1. *En la situación anterior se tiene que $C_0(U) \rtimes_{lU} G$ es Morita-Rieffel equivalente a $\mathbb{C}$; en particular es simple.*

Demostración. De acuerdo a lo visto antes, basta con probar que $C_0(G) \rtimes_{lt} G$ es equivalente a $\mathbb{C}$. Usaremos el teorema 4.1.3 con $X = G$, $H = G$ y K el grupo trivial. La acción de G será lU y la de K, por supuesto, la trivial.

Es inmediato que X/K es isomorfo a G y que la acción de H en X/K es lU. Entonces $C_0(X/K) \rtimes H = C_0(G) \rtimes_{lt} G$. Por otra parte X/H consta de un solo punto y la acción de K es la trivial, lo que nos conduce a que $C_0(X/H) = \mathbb{C}$ con la acción del grupo trivial, de modo que $C_0(X/H) \rtimes K = \mathbb{C}$. □

De acuerdo a la Afirmación anterior, para determinar $C_0(U) \rtimes_{lU} G$ basta con conseguir una representación no nula e identificar su imagen. Para construir una representación definiremos un par covariante (de acuerdo a 1.2.1).

Como siempre, μ será una medida de Haar invariante a izquierda en G. Mantenemos el nombre μ para la restricción de esa medida al abierto U. El espacio de Hilbert que consideraremos será $\mathcal{H} := L^2(U, \mu) \subset L^2(G, \mu)$. La representación de $C_0(U)$ será a través de operadores de multiplicación: $M : C_0(U) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ donde $M_f \xi = f\xi$.

Para construir la representación parcial de G consideramos la representación regular $\lambda : G \to \mathcal{B}(L^2(G, \mu))$ dada por $\lambda_t(\xi)(s) = \xi(t^{-1}s)$. Por la invariancia a izquierda de μ se tiene que λ_t es unitario para cada $t \in G$. Las identidades $\lambda_e = id$ y $\lambda_t \lambda_r = \lambda_{tr} \;\forall\; t, r \in G$ son inmediatas. Por otra parte usando que $C_c(G)$ es denso en $L^2(G, \mu)$ se concluye que λ es una representación de G.

Sea P la proyección de $L^2(G, \mu)$ en $\mathcal{H}$. Si η es la función indicatriz de U entonces $P\xi = \eta\xi$ para cada $\xi \in L^2(G, \mu)$. Sea $\iota : \mathcal{H} \to L^2(G, \mu)$ la inclusión. Definimos $u : G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ como $u_t := P\lambda_t\iota$. Como $\iota^* = P$ y λ es una representación unitaria tenemos que $u_t^* = u_{t^{-1}}$. Por otra parte, como λ es SOT continua, u también lo es. Para ver que u es una representación parcial basta con probar que $u_{t^{-1}}u_t u_r = u_{t^{-1}}u_{tr}$ para cualesquiera $t, r \in G$. Sean $\xi \in \mathcal{H}$ y $s \in U$:

$$(u_{t^{-1}}u_t u_r \xi)(s) = \eta(s)(u_t u_r \xi)(ts) = \eta(s)\eta(ts)(u_r \xi)(s) = \eta(s)\eta(ts)\xi(r^{-1}s),$$

$$(u_{t^{-1}}u_{tr}\xi)(s) = \eta(s)(u_{tr}\xi)(ts) = \eta(s)\eta(ts)\xi((tr)^{-1}ts) = \eta(s)\eta(ts)\xi(r^{-1}ts).$$

Por otro lado, observamos que para cada $t \in G$ tenemos que $u_t(u_t)^*\mathcal{H} = L^2(U \cap tU, \mu)$. En efecto, si $\xi \in Hi$ y $r \in U$: $u_t(u_t)^*\xi(r) = \eta(r)\eta(t^{-1}r)\xi(r)$; como además la función $r \mapsto \eta(r)\eta(t^{-1}r)$ es el indicador de $U \cap tU$, hemos probado que $u_t(u_t)^*$ es la proyección ortogonal sobre $L^2(U \cap tU, \mu)$. Por otro lado, es fácil ver que $C_c(U \cap tU) \subset M(C_0(U \cap tU))\mathcal{H} \subset L^2(U, \cap tU, \mu)$, además $C_c(U \cap tU)$ es denso en $L^2(U, \cap tU, \mu)$, y por lo tanto $M(C_0(U \cap tU))\mathcal{H} = L^2(U, \cap tU, \mu) = u_t(u_t^*)\mathcal{H}$.

Finalmente, para terminar de ver que (M, u) es un par covariante tomamos $\xi \in \mathcal{H}$, $s \in U$, $t \in G$, $f \in C_0(U_t)$:

$$(u_t M_f u_t^* \xi)(s) = \eta(s)(M_f u_t^* \xi)(t^{-1}s) = \eta(s) f(t^{-1}s)\eta(t^{-1}s)\xi(s) = M_{lU_t(f)}\xi(s).$$

En la última igualdad usamos que $\eta(s)\xi(s) = \xi(s)$, y que $f(t^{-1}s)\eta(t^{-1}s) = lU_t(f)(s)$, lo que se deduce discutiendo según $s \in U_t$ o $s \notin U_t$.

El teorema siguiente es una generalización del Teorema de Stone - Von Neumann (el cual corresponde al caso $U = G$).

Teorema 4.2.2. *Si $U \subset G$ es un abierto no vacío entonces $C_0(U) \rtimes_{lU} G$ es isomorfo a $\mathcal{K}(L^2(U, \mu))$. Además el isomorfismo es $M \rtimes u$.*

Demostración. Como $C_0(U) \rtimes_{lU} G$ es simple, basta con probar que la imagen de $M \rtimes u$ es $\mathcal{K}(L^2(U, \mu))$. Primero observamos (no es inmediato) que si Γ es el dominio de lU entonces $C_c(\Gamma)$ puede verse como un subespacio denso, en el límite inductivo, de $C_c(\mathfrak{B}_{lU})$. La sección que corresponde a $f \in C_c(\Gamma)$ es $t \mapsto (f_t, t)$, donde $f_t(x) = f(t, x)$. Bajo esta identificación, si $f \in C_c(\Gamma)$ y $\xi \in \mathcal{H}$:

$$M \rtimes u(f)\xi = \int_G f_t u_t(\xi) d\mu(t).$$

Si $\xi \in C_c(G)$, tomando $z \in C_c(U)$, calculando $\langle M \rtimes u(f)\xi, z\rangle$, y usando que $C_c(U)$ es denso en $\mathcal{H}$, se concluye que

$$M \rtimes u(f)\xi(s) = \int_G f(t, s)\xi(t^{-1}s) d\mu(t) = \int_G \Delta(t^{-1}) f(st^{-1}, s)\xi(t) d\mu(t).$$

Por lo tanto $M \rtimes u(f)$ es el operador integral asociado a $(t, s) \mapsto \Delta(t^{-1}) f(st^{-1}, s)$, que es compacto. Con esto concluimos que $M \rtimes u(C_c(\Gamma)) \subset \mathcal{K}(L^2(U, \mu))$. Como además $C_c(\Gamma)$ es denso en $C_c(\mathfrak{B}_{lU})$, $M \rtimes u(C_0(U) \rtimes G) \subset \mathcal{K}(L^2(U, \mu))$.

Por otra parte, dadas $h, g \in C_c(U)$ definimos $f(r, s) = \Delta(r^{-1}s)\overline{h(r^{-1}s)}g(s)$. Por la elección de g, h se tiene que $f \in C_c(\Gamma)$. Por otro lado $\Delta(t^{-1}) f(st^{-1}, s) = \overline{h(t)}g(s)$; como consecuencia $M \rtimes u(f)$ es el operador $\theta_{g,h}$, donde $\theta_{g,h}(\xi) = g\langle \xi, h\rangle$. Como $\mathcal{K}(L^2(U, \mu))$ está generado por $\{\theta_{g,h} :\ g, h \in C_c(U)\}$, deducimos que $M \rtimes u(C_0(U) \rtimes G) = \mathcal{K}(L^2(U, \mu))$. $\square$

4.3. Discusión de un artículo de Rieffel

En esta sección discutiremos la mayoría de las situaciones que se encuentran en [10]. Seguiremos el mismo camino que en el mencionado artículo, incluso con el mismo esquema.

SITUACIÓN 1: la versión para acciones parciales sería el teorema 4.2.2.

SITUACIÓN 2: consideramos una acción parcial del grupo G en el espacio X, ambos HLC, donde además pedimos que la acción sea libre, propia y continua en ∞. En este caso $C_0(X) \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(X/G)$. Esto se deduce del teorema 4.1.3 considerando $H = G$ y K el grupo trivial.

SITUACIÓN 3: esta vez la acción parcial será de $\mathbb{Z}$ en X, de manera que su dominio sea cerrado[1]. En el espacio $Y = \mathbb{R} \times X$ se considera la relación de equivalencia $(t,x) \sim (s,y)$ si y solamente si $t - s \in \mathbb{Z},\ x \in X_{s-t},\ (t-s) \cdot x = y$. Si para cada $(t,x) \in Y$ llamamos $[t,x]$ a su clase, tenemos una acción de $\mathbb{R}$ en $M := Y/\sim$ dada por $(t,[s,x]) \mapsto [t+s,x]$. Lo que sucede aquí es que $C_0(M) \rtimes \mathbb{R}$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(X) \rtimes \mathbb{Z}$. Esto es un caso particular de la situación siguiente.

SITUACIÓN 4: sean H un subgrupo cerrado del grupo G y $\cdot$ una acción parcial de H en X, que tiene dominio cerrado. Definimos $Y := G \times X$ y la relación de equivalencia $(t,x) \sim (s,y)$ sii $t^{-1}s \in H,\ x \in X_{t^{-1}s},\ (st^{-1}) \cdot x = y$. Llamaremos a este proceso suspensión. Como en el caso anterior tenemos una acción de G en $M := Y/\sim$ dada por $(t,[s,x]) \mapsto [ts,x]$. Tendremos que $C_0(M) \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(X) \rtimes H$.

Esto no es un hecho sorprendente pues la acción de G en M corresponde a hacer dos cosas. Primero se toma la envolvente de la acción de H, que existe por ser el dominio cerrado. Luego se considera la suspensión de la acción envolvente para tener una acción de G en el espacio M asociado a X^e, al que llamamos M^e. Resulta que M^e es (homeomorfo a) M y la acción de G es la misma. Si hemos probado la situación 4 para acciones globales tenemos que $C_0(M) \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(X^e) \rtimes H$, que a su vez es equivalente a $C_0(X) \rtimes H$. Lo que hemos hecho es seguir la demostración de 3.0.7. Como en [10] esto es un caso particular de lo que será la Situación 7.

SITUACIÓN 5: Como antes, H es un subgrupo cerrado de G, y consideramos la acción de G en G/H por traslación. Lo que sucede es que $C_0(G/H) \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a la C^*-álgebra de grupo de H, $C^*(H)$, la cual se define como el producto cruzado obtenido de considerar la acción trivial de H en $\mathbb{C}$. No parece claro cuál es la situación análoga para las acciones parciales.

Para las siguientes situaciones necesitamos algunos resultados, todos con demostraciones sencillas.

Afirmación 4.3.1. *Sean G, H grupos que actúan parcialmente en los espacios P, Q respectivamente, todos HLC. Entonces existe una acción parcial de $G \times H$ en $M := P \times Q$ de manera que $M_{(t,s)} = P_t \times Q_s$ y $(t,s) \cdot (x,y) = (t \cdot x, s \cdot y)$ para todo $(x,y) \in M_{(t,s)}$ y $(t,s) \in G \times H$.*

[1] Equivalentemente, X_n cerrado para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Claramente $M_{(e,e)} = M$ y la función asociada a (e,e) es la identidad en M. Si $(t,s),(r,h) \in G \times H$ entonces

$$\begin{aligned}(t,s)\cdot(M_{(t^{-1},s^{-1})} \cap M_{(r,h)}) &= (t,s)\cdot((P_{t^{-1}} \cap P_r) \times (Q_{s^{-1}} \cap Q_h)) = (P_t \cap P_{tr}) \times (Q_s \cap Q_{sh}) \\ &= M_{(t,s)} \cap M_{(t,s)(r,h)}.\end{aligned}$$

Que la función $M_{(t^{-1},s^{-1})} \cap M_{(t^{-1}r^{-1},s^{-1}h^{-1})} \to M_{(rt,hs)} \cap M_{(r,h)}$ $(x,y) \mapsto (rt,hs)\cdot(x,y)$ coincide con la función $(x,y) \mapsto ((r,h)(t,s))\cdot(x,y)$ es prácticamente inmediato a partir de la propiedades análogas para las acciones de G y H.

Finalmente veamos que el dominio de la acción de $G \times H$ es abierto. Si $((t,s),(x,y)) \in \Gamma_{G\times H}$, $x \in P_t$ e $y \in Q_s$, existen entornos V_t, V_s, V_x, V_y de t,s,x,y respectivamente tales que $(t,x) \in V_t \times V_y \subset \Gamma_G$, lo mismo con (s,y). Con esto concluimos que $(V_t \times V_s) \times (V_x \times V_y)$ es un entorno de $((t,s),(x,y))$ contenido en $\Gamma_{G\times H}$. □

Afirmación 4.3.2. *Si H es un subgrupo de G y éste último actúa parcialmente en el espacio P, entonces la restricción de la acción parcial a H es una acción parcial de H en P.*

Demostración. Todas las condiciones a verificar son inmediatas, a no ser que Γ_H es abierto, pero esto se deduce de que Γ_H puede verse como $(H \times P) \cap \Gamma_G$ que es abierto en $H \times P$. □

Afirmación 4.3.3. *La restricción de una acción parcial a un subconjunto invariante es una acción parcial en ese subconjunto.*

Demostración. Llamemos G al grupo, P al espacio y Q al subconjunto invariante. Tenemos que $Q_t = Q \cap P_t$ y $t\cdot(Q_{t^{-1}}) \subset Q_t$ para todo $t \in G$ (esto es la definición de conjunto invariante). Por lo tanto $Q_t = Q \cap t\cdot P_{t^{-1}} = t\cdot(Q \cap P_{t^{-1}}) = t\cdot Q_{t^{-1}}$ para todo $t \in G$. Por otro lado si $t,s \in G$:

$$t\cdot(Q_{t^{-1}} \cap Q_s) = t\cdot(Q \cap P_{t^{-1}} \cap P_s) = t\cdot(Q \cap P_t) \cap t\cdot(P_t \cap P_s) = Q \cap P_t \cap P_{ts} = Q_t \cap Q_{ts}.$$

Verificar que la función $Q_{t^{-1}} \cap Q_{t^{-1}s^{-1}} \to Q_{ts} \cap Q_s$ $x \mapsto (st)\cdot x$ es una extensión de $x \mapsto s\cdot(t\cdot x)$ es inmediato. Para ver que el dominio $\Gamma_G(Q)$ es abierto observamos que es la intersección de $G\times Q$ con $\Gamma_G(P)$. □

Los resultados anteriores pueden combinarse. Una forma de hacerlo es la siguiente.

Corolario 4.3.4. *Si G actúa parcialmente en los espacios P y Q, entonces hay una acción parcial de G en $M := P \times Q$. Esta acción parcial está dada por $M_t := P_t \times Q_t$ y $M_{t^{-1}} \to M_t$ $(x,y) \mapsto (t\cdot x, t\cdot y)$.*

Demostración. Sabemos que $G \times G$ actúa en M, además $D := \{(t,t) :\ t \in G\}$ es un subgrupo isomorfo a G. Por lo tanto G actúa en M a través del isomorfismo, si observamos la acción que tenemos es exactamente la de la tesis. □

La acción que se define en el último resultado es llamada la acción diagonal.

SITUACIÓN 6: Supongamos que G actúa parcialmente en P, que el dominio de la acción es cerrado, y además que H es un subgrupo cerrado de G. Observar que H actúa en P y el dominio de esta acción es cerrado. Tenemos acciones de G en P y en G/H, siendo la segunda una acción global en un espacio HLC. Pedimos además que para cada $r \in G$ se cumpla que $P = \cup_{s\in H} P_{rs}$ (que es inmediato para acciones globales). Si en $G/H \times P$ consideramos la acción diagonal tenemos que $C_0(G/H \times P) \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(P) \rtimes H$. Esto es un caso particular de la situación 7.

SITUACIÓN 7: G actúa parcialmente en M y H es un subgrupo cerrado de G. Se tiene además un mapa equivariante (morfismo) $\pi : M \to G/H$, es decir que si $x \in M_{t^{-1}}$ entonces $\pi(t{\cdot}x) = t{\cdot}\pi(x)$. Usando las Afirmaciones de arriba tenemos que H actúa en M y $P = \pi^{-1}(eH)$ es invariante por dicha acción, y por lo tanto H actúa en P. La situación 7, del artículo en discusión, establece que si la acción de G es global entonces $C_0(M) \rtimes G$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(P) \rtimes H$. Para las acciones parciales daremos una hipótesis adicional que nos permitirá afirmar lo mismo.

Afirmación 4.3.5. *Si para cada $r \in G$ tenemos que $M = \cup_{r\in H} M_{rs}$, entonces $C_0(P) \rtimes H$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(M) \rtimes G$.*

Demostración. Usaremos el teorema 4.1.3. El grupo K será G y el H será el mismo H. El espacio en que ambos actúan es $Q := \{(t,m) \in G \times M : \ tH = \pi(m)\}$, que es HLC. Considerando la acción por traslación a izquierda de G en G tenemos una acción parcial de G en $G \times M$ (la acción diagonal). Sucede que Q es un cerrado invariante y por lo tanto tenemos una acción de G en Q, dada por $t \cdot (r,m) = (tr, t \cdot m)$ si $(r,m) \in Q_{t^{-1}} = Q \cap (G \times M_{t^{-1}})$. Notar que $\Gamma_G(Q)$ es cerrado y por lo tanto la acción de G en Q es continua en ∞; es inmediato que la acción es libre. Para ver que es propia recurrimos a 2.1.7.

Tenemos una acción global de H en Q dada por $s : (t,m) = (ts^{-1}, m)$. Claramente es libre y continua en ∞, y que es propia se deduce fácilmente recurriendo a 2.1.7. Las acciones de G y H en Q conmutan pues Q es invariante por la acción de H y esta es global. Estamos en condiciones de aplicar 4.1.3: $C_0(Q/G) \rtimes H$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(Q/H) \rtimes G$.

Primero identificamos Q/H. Para ello definimos una función $R : Q \to M$ dada por $R(t,m) = m$; es inmediato que es continua y constante en las $H-$órbitas, y por lo tanto define una función continua $\widetilde{R} : Q/H \to M$ dada por $\widetilde{R}(H(t,m)) = m$. Esta función $\widetilde{R}$ es de hecho un homeomorfismo. En efecto, para probar que es abierta basta con mostrar que si $U \subset Q$ es un abierto saturado, entonces $R(U)$ es abierto. Ahora, dado $m \in R(U)$, existe $t \in G$ tal que $(t,m) \in U$. Sean V y W entornos de t y m respectivamente, tales que $(V \times W) \cap Q \subset U$. Como U es saturado, y para cualquier $m' \in M$ podemos encontrar $t' \in G$ tal que $(t', m') \in Q$, tenemos que $W \subset R(U)$. Luego $R(U)$ es un entorno de todos sus puntos. Con los mismos argumentos probamos que dado $r \in G$, se tiene que $\widetilde{R}((Q/H)_r) = M_r$. Por otra parte es fácil ver que $\widetilde{R}$ conjuga las acciones parciales de G en M y en Q/H. Concluimos que $C_0(Q/H) \rtimes G$ es isomorfo a $C_0(M) \rtimes G$, y en particular son Morita-Rieffel equivalentes.

En cambio no es tan fácil determinar Q/G, que en general no será P. Definamos $D := \{(t,m) \in G \times M : \ m \in M_t\}$ (es abierto y cerrado en $G \times M$). Luego $Q \cap D$ es abierto y cerrado en Q. También es G-invariante. Para ver que $(Q \cap D)/G$ es homeomorfo a P, se considera $F : Q \cap D \to P$ tal que $(t,m) \mapsto t^{-1} \cdot m$. Claramente F es continua y constante en las G-órbitas, y también es sobreyectiva porque $\{e\} \times P \subset Q \cap D$. Por lo tanto F define una función continua $\widetilde{F} : (Q \cap D) \to P$ tal que $(t,m)G \mapsto t^{-1}m$. La inversa de ese mapa es $m \mapsto (e,m)G$, y por lo tanto es un homeomorfismo.

Veamos que $\widetilde{F}$ es un isomorfismo entre la acción de H en P y la restricción de la acción de H a $(Q \cap D)/G$, a la cual llamamos ν. Una observación importante es que dado $s \in H$, se tiene que $[(Q \cap D)/G] \cap [s : (Q \cap D)/G] = [(Q \cap D) \cap s : (Q \cap D)]/G$; lo que se deduce usando que $Q \cap D$ es $G-$invariante. Lo anterior, y el hecho de que $(Q \cap D) \cap s : (Q \cap D) = Q \cap \{(t,m) : \ m \in M_{ts} \cap M_t\}$; implican que $\widetilde{F}((Q \cap D)^{\nu}_s) = P \cap M_s = P_s$. Por otra parte si $(t,m) \in (Q \cap D) \cap s^{-1} : (Q \cap D)$:

$$s \cdot \widetilde{F}(G(t,m)) = s \cdot t^{-1} \cdot m = (st^{-1}) \cdot m = (ts^{-1})^{-1} \cdot m = \widetilde{F}(s : G(t,m)).$$

Deducimos que $C_0(P) \rtimes H$ es isomorfo a $C_0((Q \cap D)/G) \rtimes_\nu H$. El sistema $(Q \cap D, H, \nu)$ tiene un sistema envolvente, porque es la restricción de un sistema global a un abierto. Este sistema global es el que se obtiene de restringir la acción de H en Q/G a la H-órbita de $(Q \cap D)/G$. Esta órbita es un abierto H-invariante, y por lo tanto da lugar a un ideal del producto cruzado $C_0(Q/G) \rtimes H$. Así que en general $C_0(P) \rtimes H$ es isomorfo a un ideal de $C_0(Q/G) \rtimes H$. Por lo tanto, en general, $C_0(P) \rtimes H$ es Morita-Rieffel equivalente a un ideal de $C_0(M) \rtimes G$.

Para que el ideal sea $C_0(M) \rtimes G$ basta con pedir que la H-órbita de $Q \cap D$ sea Q; lo cual es cierto si $M = \cup_{s \in H} M_{rs}$, para cada $r \in G$. En efecto, tomemos $(t,m) \in Q$. La condición anterior implica que existe $h \in H$ tal que $m \in M_{th}$. Luego, $(th,m) \in Q \cap D$ y además $h : (th,m) = (t,h)$. $\square$

Hasta el momento no me ha sido posible encontrar el análogo para las acciones parciales de la situación 8 de [10].

SITUACIÓN 9: Sean H, K subgrupos cerrados del grupo G y U un subconjunto abierto y cerrado en G. Los subgrupos actúan en G mediante $H \times G \to G \mid (h,g) \mapsto h \cdot g := hg$ y $K \times G \to G \mid (k,g) \mapsto k : g := gk^{-1}$. Restringimos ambas acciones a U, las acciones parciales resultantes son propias libres y continuas en ∞. Si además se pide que para cada $h \in H, \ k \in K$ se cumpla que $U \cap hU \cap hUk = U \cap Uk \cap hUk$, entonces las acciones parciales conmutan, lo que nos permite afirmar que $C_0(H \backslash U) \rtimes K$ es Morita-Rieffel equivalente a $C_0(U/K) \rtimes H$. Hemos escrito $H \backslash U$ porque la acción de H en G tiene como espacio de órbitas el espacio de las coclases $\{Hg : g \in G\}$.

En general no podemos afirmar que las acciones envolventes de las acciones de H y K sean las respectivas acciones definidas en G, pues no sabemos que $H \cdot U = G$ y $K : U = G$. Como además $H \cdot U$ no necesariamente coincide con $K : U$, no está claro si podemos construir un espacio con acciones de H y K en el cual podamos ver la acción parcial en U como una restricción de acciones globales.

Un caso particular es cuando el grupo K es el grupo trivial, en este caso H puede ser cualquier subgrupo cerrado, ya que las acciones conmutan trivialmente. Es fácil notar que $C_0(U/K) \rtimes H = C_0(U) \rtimes H$ y que $C_0(H\backslash U) \rtimes K = C_0(H\backslash U)$

SITUACIÓN 10: Esto es el teorema 4.1.3.

Apéndice A

Integración

A.1. Integración en espacios de Banach

Enunciaremos sin demostración los resultados que permiten definir integrales con valores en espacios de Banach o espacios localmente convexos completos.

Definición A.1.1. Sean X un espacio topológico y E un espacio vectorial topológico. Se define $C_c(X,E) := \{f : X \to E : \ \mathrm{sop}\{f\} \text{ es compacto}\}$, donde $\mathrm{sop}\{f\}$ es la clausura de $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Si $K \subset X$ es un subconjunto compacto $C_K(X,E) := \{f \in C_c(X,E) : \ \mathrm{sop}\{f\} \subset K\}$.

En caso que E sea normado, sea $\| \ \|_\infty : C_c(X,E) \to \mathbb{R}$ la norma del supremo. Si $K \subset X$ es compacto, $\| \ \|_K$ denotará la restricción de $\| \ \|_\infty$ a $C_K(X,E)$. Además si $f \in C_c(X,E)$:

$$\|f\|_1 := \int_X \|f(x)\| d\mu(x).$$

Observar que $\| \ \|_1$ es una norma en $C_c(X,E)$ y $\|f\|_1 \leqslant \mu(\mathrm{sop}\{f\})\|f\|_\infty$.

Si $\psi \in C_c(X)$ y $a \in E$ definimos $\psi \otimes a \in C_c(X,E)$ mediante: $\psi \otimes a(x) := \psi(x)a$.

Definición A.1.2. Si E_0 es un subespacio de E:

$$C_c(X) \odot E_0 := \mathrm{span}\{\psi \otimes a : \ \psi \in C_c(X), \ a \in E_0\}.$$

Observación A.1.3. Si E_0 es un subespacio denso de E, entonces $C_c(X) \odot E_0$ es denso en $C_c(X,A)$ (con la norma del supremo). Más aún, dada $f \in C_c(X,E)$ existen un compacto $K \subset X$ y una sucesión $\{f_n\}_n \subset C_c(G) \odot E_0$ tales que: $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$ y $\mathrm{sop}\{f_n\} \subset K$ para todo n.

Lema A.1.4. *Sean E un espacio de Banach, X un espacio topológico HLC y μ una medida regular positiva en X. Entonces existe una única función lineal $I_E : C_c(X,E) \to E$ con las siguientes propiedades:*

1. $I_E(\psi \otimes a) = \int_X \psi d\mu a \ \forall \ \psi \in C_c(X), \ a \in E.$

2. $\|I_E(f)\| \leqslant \|f\|_1 \ \forall\ f \in C_c(X,E)$.

3. Si $T : E \to F$ *es un mapa lineal (o conjugado lineal) y acotado entre espacios de Banach, entonces* $T(I_E(f)) = I_F(T \circ f)$ *para toda* $f \in C_c(X,E)$.

Definición A.1.5. En las hipótesis del lema anterior, dada $f \in C_c(X,E)$ se define:

$$\int_X f d\mu := I_E(f).$$

A.2. Integración en espacios localmente convexos y completos

Los resultados que se enuncian a continuación se encuentran en [6] (II 6).

Si E es un espacio localmente convexo y p es una seminorma continua de E, se definen $N_p := \{a \in E : \ p(x) = 0\}$ y E_p el espacio de Banach que resulta de completar (Apéndice B) E/N_p con la norma $\|x + N_p\| := p(x)$. Además $\gamma_p : E \to E_p$ es la proyección, que es continua.

Proposición A.2.1. *Supongamos que* X *es un espacio topológico con una medida regular* μ *y* E *es un espacio localmente convexo completo. Entonces existe una única función lineal* $I_E : C_c(X,E) \to E$ *que cumple las siguientes propiedades:*

1. Dada una seminorma continua en E*,* p*, se tiene que* $\gamma_p(I_E(f)) = I_{E_p}(\gamma_p \circ f)$.

2. Si $T : E \to F$ *es lineal (o conjugado lineal) y continuo entre espacios localmente convexos completos, entonces* $T(I_E(f)) = I_F(T \circ f)$ *para toda* $f \in C_c(X,E)$.

Definición A.2.2. En las hipótesis de la Proposición anterior, para $f \in C_c(X,E)$ se define la *integral* de f como:

$$\int_X f d\mu := I_E(f).$$

De acuerdo a la proposición anterior la integral definida está caracterizada por la siguiente propiedad:

$$\psi\left(\int_X f d\mu\right) = \int_X \psi \circ f d\mu \qquad \forall\ \psi \in E^*.$$

Corolario A.2.3. *En las hipótesis del lema anterior, si* $f \in C_c(X,E)$ *y* p *es una seminorma continua en* E*, se cumple que:*

$$p\left(\int_X f(t) d\mu(t)\right) \leqslant \int_X p(f(t)) d\mu(t).$$

Corolario A.2.4. *Supongamos que E es un espacio localmente convexo completo, X e Y son espacios topológicos HLC y μ es una medida regular en X. Entonces dada $F : Y \times X \to E$ continua y de soporte compacto se tiene que $y \mapsto \int_X F(y,x)d\mu(x)$ es continua y de soporte compacto. Además si Y tiene una medida regular ν se cumple que:*

$$\int_Y \int_X F(y,x)d\mu(x)d\mu(y) = \int_X \int_Y F(y,x)d\mu(y)d\mu(x).$$

Corolario A.2.5. *Supongamos que G es un grupo topológico HLC com medida de Haar μ, E es un espacio localmente convexo completo. Si definimos la medida $\nu(A) = \mu(A^{-1})$, entonces dada una función $f \in C_c(G,E)$ y un $r \in G$ se cumple que:*

$$\int_G \Delta(t^{-1})f(t^{-1})d\mu(t) = \int_G f(t)d\mu(t), \qquad \int_G f(rt)d\mu(t) = \int_G f(t)d\mu(t),$$

$$\int_G f(t^{-1})d\nu(t) = \int_G f(t)d\mu(t), \qquad \Delta(r)\int_G f(t)d\mu(t) = \int_G f(tr)d\mu(t).$$

Apéndice B

Completaciones

B.1. Completación de Hausdorff

Describimos brevemente la completación de Hausdorff de un espacio semi-normado.

Fijemos un espacio semi-normado $(E, \| \ \|)$. A partir de él queremos construir un espacio de Banach $(H(E), \| \ \|)$ con la siguiente propiedad universal: existe una isometría $\iota : E \to H(E)$ de manera que $\iota(E)$ es denso en $H(E)$ y, dado cualquier operador continuo (lineal o conjugado lineal) $T : E \to F$, siendo F de Banach, existe un único operador continuo $H(T) : H(E) \to F$ de manera que $H(T) \circ \iota = T$.

Una manera de hacer esto es la siguiente. Sea $C(E)$ el espacio de las sucesiones de Cauchy en E con las operaciones punto a punto. Si $x \in C(E)$ definimos $\|x\| := \lim_n \|x_n\|$ y la relación de equivalencia en E: $x \sim y$ si y solamente si $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$. Llamamos $H(E) := C(E)/\sim$, $\pi : C(E) \to H(E)$ a la proyección en el cociente y $[x] := \pi(x)$. Es sencillo ver que las operaciones pasan al cociente con lo que $H(E)$ es un espacio normado, con algo más de trabajo se ve que $H(E)$ es completo y por lo tanto un espacio de Banach.

Para definir $\iota : E \to H(E)$, dado $a \in E$ $s(a)$ denotará la sucesión constante a. Definimos $\iota(a) = [s(a)]$, que claramente es una isometría. Para ver que $\iota(E)$ es denso en $H(E)$ tomamos $[x] \in H(E)$, es fácil ver que $[x]$ es el límite de la sucesión $n \mapsto \iota(x_n)$.

Para la propiedad universal se procede de la siguiente manera: para el operador T se define $T_0 : C(E) \to F$ de manera que $T_0(x) = \lim_n T(x_n)$, que claramente es lineal (o conjugado lineal según sea T) y además respeta $\sim$. Sea $H(T)$ el operador que define en $H(E)$, que es el único tal que $H(T)([x]) = \lim_n T(x_n)$. Observar que $\|H(T)([x])\| \leqslant \|T\|\|[x]\|$, y que además $H(T)(\iota(a)) = T(a)$. Lo anterior implica que $H(T)$ es el que buscamos y además $\|H(T)\| = \|T\|$. Por otra parte, si $S : H(E) \to F$ es operador continuo tal que $S \circ \iota = T$, debe ser $S = H(T)$ en $\iota(E)$, y por continuidad $S = H(T)$.

La propiedad universal puede usarse para extender una involución o una multiplicación continua. Si $^* : E \to E$ es una involución, es decir, una isometría conjugada lineal tal que $a^{**} = a$

para todo $a \in E$, existe $^* : H(E) \to H(E)$, que es operador dado por la propiedad universal para $E \to H(E) \mid a \mapsto \iota(a^*)$. Con esto es fácil ver que $^* : H(E) \to H(E)$ también es una involución.

Para extender una operación $E \times E \to E$ $(a, b) \mapsto ab$ lineal (o conjugada lineal) en ambas variables y tal que $\|ab\| \leqslant K\|a\|\|b\|$ se usa la propiedad universal dos veces. Primero se considera, para cada $a \in E$, el operador continuo $M_a : E \to H(E)$ tal que $M_a(b) = \iota(ab)$. Por la propiedad universal existe una única extensión $\widetilde{M_a} : H(E) \to H(E)$ tal que $\iota(b) \mapsto \iota(ab)$. Esto da lugar a un operador acotado $E \to B(H(E)) \mid a \mapsto \widetilde{M_a}$. Como $B(H(E))$ es de Banach existe una única extensión $H(M) : H(E) \to B(H(E))$. Se define $[x] \cdot [y] = H(M)([x])([y])$. Notar que $\iota(a) \cdot \iota(b) = H(M)(\iota(a))(\iota(b)) = \widetilde{M_a}(\iota(b)) = \iota(ab)$. También $\|[x] \cdot [y]\| \leqslant K\|[x]\|\|[y]\|$.

De esta manera es posible construir, a partir de una $*$-álgebra normada, una $*$-álgebra de Banach que "contenga" a la primera como una $*$-subálgebra densa.

B.2. C^*-completación de una $*$-álgebra de Banach

Sea B una $*$-álgebra de Banach. Es posible construir una C^*-álgebra A con la siguiente propiedad universal: existe un $*$-homomorfismo $\iota : B \to A$ tal que $\iota(B)$ es denso en A y además dado cualquier $*$-homomorfismo $\psi : B \to C$, siendo C una C^*-álgebra, existe un único $*$-homomorfismo $\widetilde{\psi} : A \to C$ tal que $\widetilde{\psi} \circ \iota = \psi$.

Evidentemente dos C^*-álgebras que cumplan la mencionada propiedad universal serán isomorfas; la C^*-completación es la clase de isomorfismo de una de estas. En general no distinguimos entre uno de sus representantes y la clase en sí. Para la construcción ver [6] VI 10.

Bibliografía

[1] Abadie, Fernando, *Enveloping actions and Takai duality for partial actions.* J. Funct. Anal. 197 (2003), no. 1, 14 - 67.

[2] Abadie, Fernando, *On partial actions and grupoids.* Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2003), no.4, 1037-1047.

[3] Abadie, Fernando; Martí Pérez, Laura, *On the amenability of partial and enveloping actions*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), no.11, 3689-3693.

[4] Achigar, Mauricio, *Equivalencia de Morita y C^*-Álgebras de traza continua.* Monografía de Licenciatura, Universidad de la República.

[5] Exel, Ruy, *Twisted Partial Actions, a classification of regular C^*-algebraic bundles*, Proc. London Math. Soc. (3) 74 (1997), no.2, 417 - 443.

[6] Fell, J.M.G.; Doran, R.S., *Representation of C^*-algebraic bundles, locally compact groups, and Banach $*$-algebraic bundles*, Pure and Applied Mathematics, Vols. 125 - 126. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[7] Pedersen, Gert K., *C^*-algebras and their automorphism group.* London Mathematical Society Monographs, 14. Academic Press, Inc. London-New York, 1979.

[8] Raeburn, Iain, *Induced C^*-Algebras and a Symmetric Imprimitivity Theorem*, Math. Ann. 280, 369-387 (1988)

[9] Raeburn, Iain; Williams, Dana P., *Morita equivalence and continuous-trace C^*-algebras.*, Mathematical Surveys and Monographs, 60. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[10] Rieffel, Marc A., *Applications of Strong Morita Equivalence to Tranformation Group C^*-Algebras*, Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980), pp.299-210, Proc. Sympos. Pure Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

[11] Sotomayor J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro.

[12] Williams, Dana P., *Crossed Products of C^*-Algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, 134. American Mathematical Society, Providence, R.I., 2007.